SUKEN 2021 No.6

85898690

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

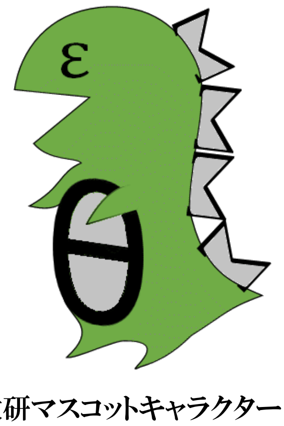
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$x^n + y^n = z^n$$

1729

142857

Waseda Jitsugyo
Mathematics Club



数研マスコットキャラクター
すうけんザウルス

はじめに

こんにちは、数学研究同好会（すうけん）です。

部誌は今年で第6号となりました。完全数ですね（？）。今年度は中高ともにかなり多くの新入生が加わり、部員数はなんと40人になりました！すごいです。そしていつも通りみんなで楽しく数学をしたり、遊んだりして平和に過ごしています。

数研はどんな部活なのかを簡単に説明します。数研ではもちろん、問題を一緒に解いたり、数学の議論をしたりもしますが、数学に限らず、みんなで遊んだり、雑談したりもします。ときには講義を開いたり、各種コンテストに参加したりもします。とても楽しいです。

さて、下の目次を見てみてください。第 1 章は何ページありますか…？ 第 1 章がこの部誌のほぼ半分を占めていますね。これは中 2 の部員数名が共同で作成した超大作です。みんなとても優秀で数学が大好きです。かなり難しい内容ではありますが、苦労しながら一生懸命書いたものなのでぜひ読んでください！

他にも、数研部員と OB の先輩による数学に関するアドバイスや、過去に起こった数研での面白い出来事などを紹介しています。

そして昨年に引き続き、新入生の方にはアイコンを作成してもらいました。（今年は新入生がかなり多いため、アイコンの数もかなり多くなりました。）p.50 の「すうけん 2021 メンバー」にアイコンの一覧があり、記事タイトルの右下に記事を書いた人のアイコンがあります。

それでは、数学研究同好会部誌第6号をお楽しみください！

目次

数学の用語・記号について

この部誌をより楽しむために必要最低限の知識をまとめました。

［自然数］$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$

［整数］$\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

［有理数］ 二つの整数の比で表される数（分母は0でない整数）。 例： $\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{4}$

［無理数］ 二つの整数の比で表すことができない数。

［実数］ 有理数と無理数をあわせて実数と呼ぶ。数直線上に表せる数。

［正(せい)の実数］ 0より大きい実数。

［負(ふ)の実数］ 0より小さい実数。

［絶対値］ 数直線上の、ある実数xと0の距離を絶対値といい、$|x|$で表す。 例：$|2| = 2$、$|-2| = 2$

［定数］ 定まった数。 例：2，3（一般的に表すときにはa, bなどの記号を用いる。）

［変数］ 定まっていない数。 x, yなどの記号を用いる。

［関数］ ある変数xの値が決まればyの値が 1 つに決まるとき、yをxの関数という。

例：円の半径rが決まればその円周Lも1つに決まる（$L = 2\pi r$）ため、円周Lは半径rの関数である。

［指数］ a^bをaのb乗といい、bを指数という。bが自然数のときは、a^bはaをb回掛け算した値である。

例：（3の 4 乗）$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$、指数は4

［～乗根］ $a^n = b$であるとき、aをbのn乗根という。例：9の 2 乗根は3と−3

［任意の～］ どの～でも、いずれの～でも

第1章

微積分から学ぶナブラ演算子ゲーム！

最近の数研の活動ではナブラ演算子ゲームという数学を活用したカードゲームをやることが多く、そのカードゲームをするためには、三角関数、極限、微分、積分といった知識が必要です。そこで僕たちはこのゲームにたくさんの人が興味を持ってもらいたいので、今回の部誌を書くことにしました。また、微分や積分について知りたい方もこの章を読んでいただけたら、うれしいです。

1. 関数の説明　～$y=ax^2$関数，対数関数，三角関数～

(1) $y=ax^2$の関数（2 次式の関数）

$y=ax^2$の関数は式の通りで「y」が「x^2」に比例するという関数です。この関数のグラフは放物線を描く形になります。

(2) 対数関数

対数は大きな数を簡単に表すために考案されたもので、例えば、発電量としての一兆ワットをアラビア数字で書くと、

1,000,000,000,000 ワット

となり、0 が 12 個付き、13 桁の数字となりますが、これを指数表すと、

10^{12}ワット

と、簡単化できます。これをもっと簡単にしたいというとき、指数だけを抜き出して見るという方法があります。その方法が対数で、記号はlog(ログ) を使います。例えば、

$$\log_{10} 10^{12} = 12$$

と表記します。この式では 10 の何乗であるかを右辺に記しています。この 10 を対数の底と呼び、もとの10^{12}を真数（しんすう）と呼びます。

一方、 10^{12}の右肩の指数の 12 をこの式の左辺の $\log_{10} 10^{12}$ におき替えると、

$$10^{12} = 10^{\log_{10} 10^{12}}$$

と書くこともできます。

このようなことから、対数の関係を式で表すと(一般化すると)、真数a(例では10^{12})の対数の底がb(例では 10)で対数が c(例では 12)の場合には、

$$\log_b a = c \qquad \cdots\cdots ①$$

と表せますが、同時に指数で表すと、

$$a = b^c \qquad \cdots\cdots ②$$

も成り立ちます。さらに、②の式を①のaに代入すると、

$$\log_b b^c = c$$

も成り立ちます。さらに、②の式の右辺のcに①の式の左辺を代入すると、

$$a = b^{\log_b a} \qquad \cdots\cdots ③$$

も成り立つことがわかります。

ここからは対数の計算で成り立つ、2 つの公式についてみていきます。
まず、次のような計算が成り立っているとします。

$$m = k \times l \qquad \cdots\cdots ④$$

③の式を使うと対数の底をbとして

$$m = b^{\log_b m} \qquad k = b^{\log_b k} \qquad l = b^{\log_b l}$$

の関係があるので、これらを④の式に代入すると

$$b^{\log_b m} = b^{\log_b k} \times b^{\log_b l}$$

が成り立ちます。ここで右辺に、$a^b \times a^c = a^{b+c}$になる法則(指数法則)をつかって、

$$b^{\log_b m} = b^{(\log_b k + \log_b l)}$$

が成り立ちます。この式の両辺の指数が等しいので、

$$\log_b m = \log_b k + \log_b l$$

が得られます。左辺のmに④の式を代入すると、

$$\log_b(kl) = \log_b k + \log_b l \qquad \cdots\cdots ⑤$$

になります。このことから「掛け算の対数は、対数の足し算に等しい」ということがわかります。さらに、⑤の式を使うと、

$$\log_b a^2 = \log_b(a \times a) = \log_b a + \log_b a = 2\log_b a$$

$$\log_b a^3 = \log_b(a \times a \times a) = \log_b a + \log_b a + \log_b a = 3\log_b a$$

などの関係があることがわかります。この関係を一般化すると、

$$\log_b a^n = n\, log_b a \qquad \cdots\cdots ⑥$$

になります。

同じように、割り算の対数が対数の引き算に等しくなるのではないか、と思う勘の良い人もいるでしょう。次の公式はまさにそれで、割り算 $k \div l$ の対数である $\log_b(k/l)$ に⑤と⑥の式を使うと、

$$\log_b \frac{k}{l} = \log_b k + \log_b \frac{1}{l}$$

分数は－1 乗として表すことができるので、

$$\log_b \frac{k}{l} = \log_b k + \log_b l^{-1}$$

$$= \log_b k - \log_b l \qquad \cdots\cdots ⑦$$

が得られます。これは、「割り算の対数は対数の引き算に等しい」ことを意味します。

　次に、対数の計算で用いられることが多い、底の変換公式を説明します。底の変換公式は、$a > 0\,, b > 0\,, c > 0\,, a \neq 0\,, c \neq 0$のとき、

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

になるというものです。では早速、証明していきます。③の式を使って

$$a^{\log_a b} = b \qquad \cdots\cdots ⑧$$

と表せます。次に、公式の形にするために左辺の指数をなくしたいので、この両辺に対数をとる（底はc）と、

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

となります。ここで、⑥の式を用いて左辺を変形すると、

$$\log_a b \times \log_c a = \log_c b$$

となるので、両辺を $\log_c a$ で割ると底の変換公式を得ることができます。

　ここで、対数関数の定義について、見ていくことにします。

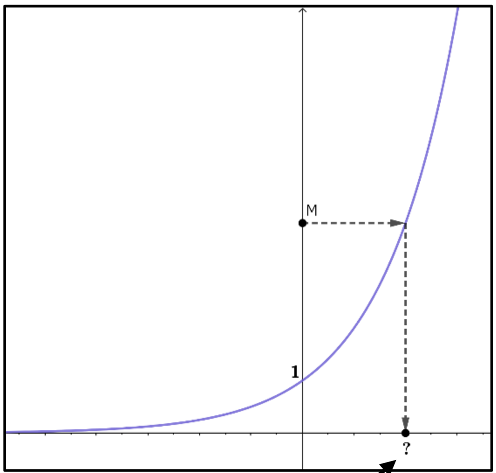
「$y = a^x$」の関数を考えたとき、そのグラフは図1のようになります。この時、どのような正の実数Mに対しても、

$$a^x = M$$

となるxの値がただ一つに定まります。この値xを、aを底とするMの対数ということができて、

$$x = \log_a M$$

で表せます。なお、負の数Mのx乗根は存在する場合としない場合があり、それはaが負の数の場合も同様です。また、$a = 1$の時は、Mが常に 1 となり、それ以外の場合と大きく異なるので対数関数とは言わないことにします。



？の値を$\log_a M$と定める

図1　指数関数のグラフ

　このような条件をまとめると対数関数の定義は、

$a > 0, a \neq 1, M > 0$のとき、

$$a^x = M \Leftrightarrow x = \log_a M$$

となります。これをxの対数関数yとして定義すると、

$a > 0, a \neq 0, x > 0$のとき、

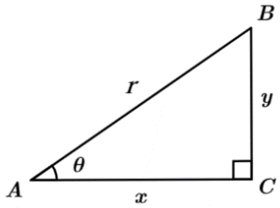
$$y = \log_a x$$

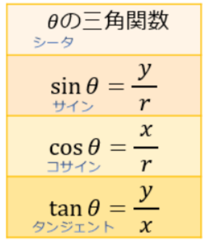
(3) 三角関数

　三角関数とは、角の大きさと線分の長さの関係に関する関数です。この関数は、非常に様々な性質があるのでとても役立ちます。三角関数はいろいろな方法で定義することができますが、まずは直角三角形ですることとします。2つの直角三角形において、1つの鋭角の大きさが等しければ、それらは相似であるため、3辺の長さの比が等しくなります。よって、直角三角形において、1 つの鋭角の大きさが決まれば、3辺の比が決まります。

では、その説明ですが、まず、図のような直角三角形ABCにおいて、
$\angle A=\theta$, $AB=r, AC=x, BC=y$と置きます。
この時、

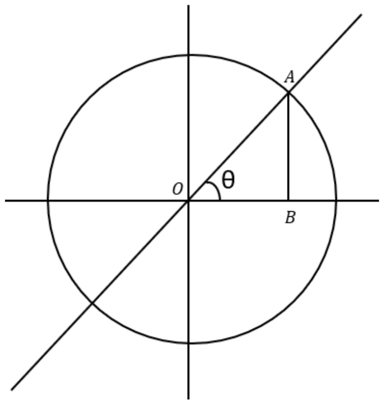
$\frac{y}{r}$を $\sin\theta$
$\frac{x}{r}$を $\cos\theta$
$\frac{y}{x}$を $\tan\theta$





とします。

この $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ を三角関数と呼びます。この 3 つのほかにも、いくつかありますが、あまり使われなく、ナブラ演算子ゲームには出ないので省略します。しかし、このように直角三角形で定義してしまうと、θは$0° < \theta < 90°$に限られてしまいます。これは、この範囲でしか直角三角形は作られないためです。先人たちはθがどんな値でも三角関数が定義できるようにしたくなったので、どうすればいいか考えました。そこで円を使った定義が思いつかれました。その円の名前が単位円です。単位円とは、半径が1である円のことです。この場合、円の円周上の任意の場所に点Aをとり、そこからx軸へひいた垂線の足をBとします。すると、AOは半径であることから長さは1となので、OBが$\cos\theta$、ABが$\sin\theta$というように三角関数が成立していることになります。



この場合では、任意の場所に点を取れるようになるので、どんな角度でも θ がとれるようになり、先ほどの直角三角形での定義が拡張できたことになります。

2. 関数の微分

(1) 具体的な微分とは何か

yがxの関数であるとき、yの値は変数xの値によって決まります。そのことを明確にするために、yを次の式のように、$f(x)$と表すことにします。(エフエックスと読みます。)

$$y=f(x)$$

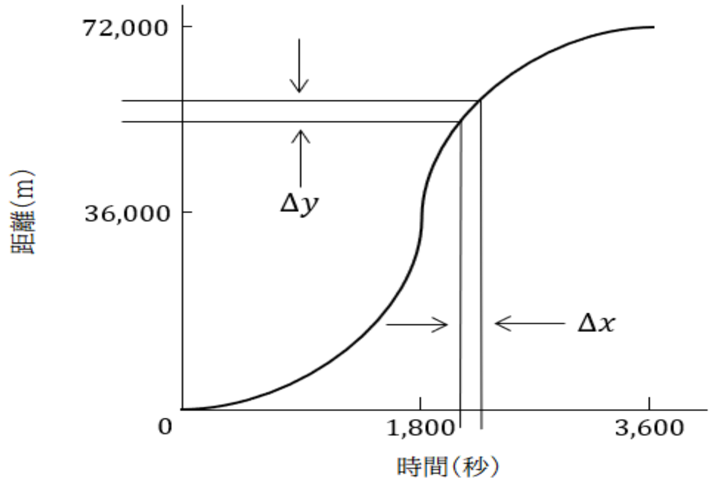
括弧の中のxは変数xを表しています。この$f(x)$を変数xの関数(function)と呼びます。

微分とは何か簡単に言うと、「一瞬の変化の様子をとらえること」です。この世界にある物のほとんどは常に変化していて、変化しているものを詳しく調べたいとき、その中でも自然法則や物理法則で成り立っている変化(冷めていく飲み物の温度変化、投げたボールの速さの変化、など)は考えることが難しいと言えます。そこで、微分が役立つことが多いのです。具体的にどう役立つのかの詳しい例は後のページで説明するので、「微分を用いて様々なことが考えられる」ということを念頭に置いてみていきましょう。

(2) 速度の微分、極限の考え方、微分の定義式、微分可能な関数とは

今回は微分を理解するための身近な量として車や電車の速度を例にとることにします。このよう

なものは、常に一定の速さを維持しているわけではありません。止まっている車が動き始めて、結果的に 1 時間で 72km 走ったという場合には、一例として図2のようなグラフになるでしょう。このグラフは、止まっている車が動き出すので、最初は速度が遅くて距離はあまり稼げませんが、1800 秒(30 分)後に最高時速に達して、3600 秒(1時間)後には再び停止する場合を示しています。



より正しい速度はもっと短い時間Δxあたりに移動した距離の変化Δyから求めます。

図 2　車の速度のグラフの一例

この 1 時間の間に、車のスピードメーターは秒速 0m(時速 0km)から始まって、やがて秒速 20m(時速 72km)を超え、再び秒速 0m に戻ることになります。私たちが車のスピードメーターを見ながら「時速 36km」とか「時速 72km」という風に何気なく使っている速度(＝距離÷時間)は、1 時間かけて測定した速度ではなく、もっと短い時間Δxの間に移動した距離Δyから求めた速度、

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \cdots\cdots ⑨$$

です。ここでは速度(velocity)を表す変数としてvを使い、この短い時間や短い距離の「変化」や「差」を表すために Δ (デルタ)という記号を使っています。⑨の式のΔyは、関数$f(x)$を使って書くと、時間$x+\Delta x$の時の$f(x+\Delta x)$の時間がxのときの$f(x)$の差なので、

$$\Delta y \equiv f(x+\Delta x) - f(x)$$

と書けます。この式で使った3本線の等号≡は、「右辺と左辺が等しいと定義する」ことを意味します。この式を使うと⑨の式は、

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \cdots\cdots ⑩$$

と表せます。

この時間Δxとしては、60 秒より 10 秒のほうがよく、10 秒より 1 秒のほうがスピードメーターの表示としては当然いいでしょう。ドライバーにとっては、60 秒前や、10 秒前の速度がわかるスピードメーターがあったとしても、それは不良品と同じです。その瞬間ごとの車の速度が正確にわからない

と、スピードメーターとしては使い物になりません。このように、私たちが日常生活で接している速度という概念は、事実上「ある瞬間の速度」を表しています。なお、より正確には、物理学では「速度」と「速さ」を区別します。速さは「速度の大きさ」を表す量ですが、速度は「速度の大きさ」に加えて「方向」も表します。今回は簡単にするために、一方向に、直線的に進む場合のみを考察するので、「速度＝速さ」が成り立つこととします。

瞬間速度は瞬間(まばたきの間)という言葉のように、短い時間で短い距離を割った値です。例えば、0.1 秒間に 2m の距離を走った時の速度は、

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{0.1} = 20(\mathrm{m/s})$$

となり、秒速 20m となります。先ほど見たように、速度は⑨の式 $v = \frac{\Delta y}{\Delta x}$で表せますが、さらに瞬間の速度をもっと極限的に短い時間を使って表すことにしましょう。その場合、極限的に短い時間は Δ の代わりに、アルファベットのdを使って、dxと表すことにします。また、この時間に移動した距離もdを使ってdyと表すことにします。このdは英語で「差」を表す difference の頭文字からとっています。したがってこのdを使うと、

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \qquad \cdots\cdots ⑪$$

$\frac{dy}{dx}$の読み方は、「ディーエックスぶんのディーワイ」あるいは「ディーワイ　ディーエックス」です。

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$は$\Delta x$がゼロに限りなく(limit まで)無限に近づくことを意味します。Δとdの違いは「Δは小さいけれどゼロではない有限の大きさを持つのに対してdは無限に小さい(無限小である)」ということです。ちなみにアルファベットのdのギリシャ文字がΔです。また、無限ではない、ある一定の大きさを持つことを「有限の大きさを持つ」と表現します。⑩の式の「無限に小さい距離dyを無限に小さい時間dxで割った数」が微分です。この式を日本語では、

速度は距離の時間微分である

といいます。これは別の表現を使うと、「速度」は「ある時間dxあたりの距離の変化dyの割合」を表しているといえます。つまり、微分というのはある量の変化の割合を表します。

次に⑪の式を⑩を使って表します。すると、

$$v = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

となります。yを関数$f(x)$で表すと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

となり、関数$f(x)$を微分した、

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \qquad \cdots\cdots ⑬$$

を導関数と呼びます。微分を表すために、この右辺のように、「$'$」をつける書き方もあります。f'は「エフダッシュ」や「エフプライム」と読みます。

⑫、⑬の式をまとめると、

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \cdots\cdots ⑭$$

となります。この⑭の式が微分の定義式です。

(3) 簡単な関数の微分(1 次式、2次式、n次式の微分、定数の微分)

ここで、早速⑭の式を使って微分の具体的な計算に入っていきましょう。まずは、$y = ax$のような1次関数を微分するとどうなるのか、試してみましょう。最初にyを関数$f(x)$で表すと、

$$f(x) = ax$$

になるので、

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)$$

であるので、$y = ax$を⑭の式の右辺に代入すると、導関数は、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} a \\
&= a \qquad \cdots\cdots ⑮
\end{aligned}$$

となるので、導関数は$\frac{dy}{dx} = a$となります。このような1次式を微分すると、傾きaだけが残ります。

次に、$y = ax^2$(2 次式)の導関数はどうなるのか見てみましょう。$y = ax$の微分の時と同様にまずはyを関数$f(x)$で表すと、

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^2$$

なので、微分は

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x)(x + \Delta x) - ax^2}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\} - ax^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^2 + 2a\Delta x + a(\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2ax\Delta x + a(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\Delta x)$$

となり、$\Delta x \to 0$の極限をとるとΔxは 0 になるので、$a\Delta x$も0になります。したがって、

$$= 2ax \qquad \cdots\cdots ⑯$$

　このような計算はxが3次や4次の関数でも同様にできますが、それをいちいち計算するのは面倒です。実は、n次式の微分にはある規則性があります。それは、$f(x) = ax^n$を微分すると、

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(ax^n) = anx^{n-1} \qquad \cdots\cdots ⑰$$

になる、という関係です。つまり、「ax^nを微分するとanx^{n-1}になる」ということです。試しに$n = 1$を代入すると、

$$f(x) = ax^1 = ax$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = a \times 1x^{1-1} = ax^0$$

となり、$x^0 = 1$なので、

$$\frac{d}{dx} f(x) = a$$

になります。これは⑮と同じ結果になります。

　また、$n = 2$を代入すると、

$$f(x) = ax^2$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = a \times 2x^{2-1} = 2ax$$

となり、⑯の式と同じ結果になります。このように、微分の公式は 1 度覚えてしまえば、⑮や⑯の式のような計算をいちいちする必要がなくなるので便利ですが、この公式の証明はページの都合上省きます。（今回は重要ではありません）

　次に、定数の微分について考えます。定数は次のように表すことができます。

$$f(x) = c$$

右辺のcは定数（constant）をあらわし、変化しない一定の数です。したがって$x + \Delta x$の値も

$$f(x + \Delta x) = c$$

です。よって、微分の定義式に代入すると、

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

になります。つまり、定数の微分はゼロになります。

ここで、微分できない関数について説明します。微分できない理由は様々ですが、今回は絶対値がついた関数に注目してみます。まず、絶対値についた関数は次のように表せます。

$$f(x) = |x|$$

また、この関数のグラフは図3のようにあらわすことができます。

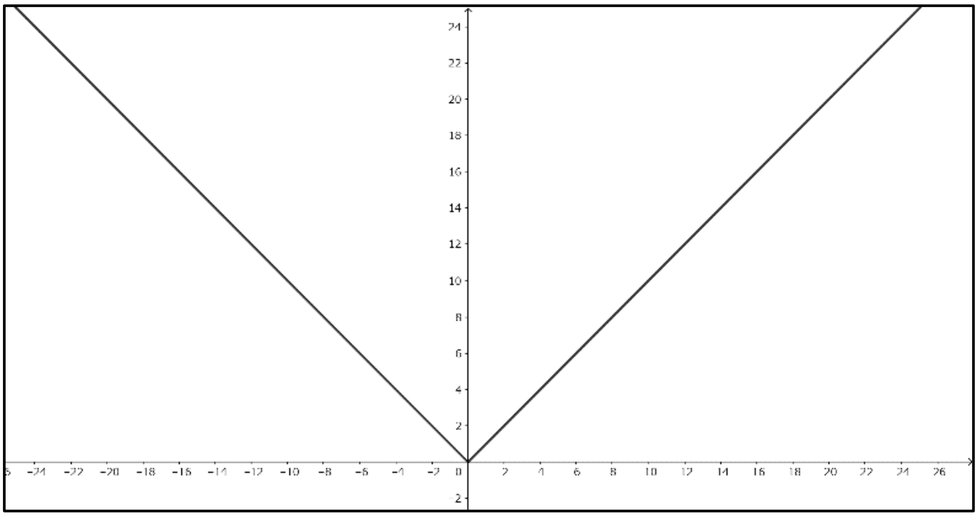


図3　$x = 0$で微分不可の関数

このグラフを見てわかる人も多いと思います。この関数を微分の定義式に当てはめたとき、Δxがプラス側から近づくか、マイナス側微分ができる関数はから近づくかで値が異なるということです。その値はプラス側だと1、マイナス側だと-1 になります。従って、この関数は値がそれぞれ違うので微分できません。逆に微分ができる関数は「微分可能な関数」といいます。

(4)関数の和・積の微分の公式

ここからは本格的に微分の公式を見ていきます。微分にはいくつかの公式があり、⑰の式もその1つです。微分を実際に使う場合にとても役立つので覚えておくとよいでしょう。まずは、関数の和の微分の公式について説明します。2つの微分可能な関数$f(x)$と$g(x)$があり、それぞれの導関数が$f'(x)$と$g'(x)$である場合を考えます。この時、「2つの関数の和$f(x)+g(x)$の微分$\{f(x)+g(x)\}'$は $f'(x)+g'(x)$ である。」というのが、関数の和の微分公式です。式で書くと、

$$\{f(x)+g(x)\}' = f'(x)+g'(x) \qquad \cdots\cdots ⑱$$

となります。

ここからは⑱の式の証明をしていきます。まず、関数の和の微分の定義は、定義式から$x+\Delta x$とxでの$\{f(x)+g(x)\}$の差をΔxで割って$\Delta x \to 0$の極限をとったものなので、

$$\{f(x)+g(x)\}' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\} - \{f(x)+g(x)\}}{\Delta x}$$

と表せます。この式を並び替えて計算すると、

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x) + g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

となります。よって、⑱の式は証明できました。

次に関数の積の微分公式を見てみます。和の微分のときと同様に、2 つの微分可能な関数$f(x)$と$g(x)$があり、それぞれの導関数が$f'(x)$と$g'(x)$である場合を考えます。この時、「2つの関数の積$f(x)g(x)$の微分$\{f(x)g(x)\}'$は $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ である。」というのが、関数の積の微分公式です。式で書くと、

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \cdots\cdots ⑲$$

となります。

積の関数の微分の定義は定義式から$x+\varDelta x$とxでの$f(x)g(x)$の差を$\varDelta x$で割って$\varDelta x \to 0$の極限をわったものなので、

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x) - f(x)g(x)}{\varDelta x}$$

と表せます。ここで、$\frac{f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x)-f(x)g(x)}{\varDelta x}$の分子に

$$f(x+\varDelta x)g(x) - f(x+\varDelta x)g(x)$$

を加えます。これを加えることによって和の公式と同じく分けて考えることができます。見てわかる通り計算するとゼロになり、$\varDelta x \to 0$の極限をとっても、もちろんゼロです。これを加えて計算すると、

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x) - f(x)g(x) + f(x+\varDelta x)g(x) - f(x+\varDelta x)g(x)}{\varDelta x}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x) - f(x+\varDelta x)g(x) + f(x+\varDelta x)g(x) - f(x)g(x)}{\varDelta x}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)g(x+\varDelta x) - f(x+\varDelta x)g(x)}{\varDelta x} + \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)g(x) - f(x)g(x)}{\varDelta x}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x)\{g(x+\varDelta x) - g(x)\}}{\varDelta x} + \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{\{f(x+\varDelta x) - f(x)\}g(x)}{\varDelta x}$$

$$= \lim_{\varDelta x \to 0} f(x+\varDelta x) \frac{g(x+\varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} + \lim_{\varDelta x \to 0} \frac{f(x+\varDelta x) - f(x)}{\varDelta x} g(x)$$

となります。微分の定義式と

$$\lim_{\varDelta x \to 0} f(x+\varDelta x) = f(x)$$

の関係を使うと

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

となるので、⑲の式は証明できました。

(5) 関数の積の微分公式を使ってみよう

証明ができたところで早速積の微分公式を使ってみましょう。例として、

$$f(x) = ax\ ,\ g(x) = bx^3$$

の場合の$f(x)g(x)$を使ってみましょう。積の微分公式を使うと、

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\\ &= (ax)'bx^3 + ax(bx^3)'\\ &= abx^3 + ax(3bx^2)\\ &= 4abx^3\end{aligned}$$

となり、導関数が求められました。一方で、

$$f(x)g(x) = ax \times bx^3 = abx^4$$

であり、abを係数と考えると⑰の微分公式を使って求めることもできます。この公式を使うと、

$$\{f(x)g(x)\}' = \{abx^4\}' = 4abx^3$$

(6) 合成関数の微分公式

次に合成関数の微分公式を見てみます。合成関数というのは、変数がuである関数

$$y = f(u) \qquad \cdots\cdots ⑳$$

があるとして、その変数uが別の変数xの関数

$$u = g(x) \qquad \cdots\cdots ㉑$$

である場合です。式で書くと、⑳の式に㉑の式を代入して、

$$y = f(u) = f(g(x))$$

となります。この右辺のように、2つの関数が合成されているような関数のことです。この合成関数を構成する関数$f(u)$と$g(x)$が微分可能であり、それぞれの導関数が$f'(u)$と$g'(x)$であるとします。この時、変数で$f(g(x))$を微分した場合に、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)\\ &= \frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{du}f(u)\\ &= \frac{du}{dx}\times\frac{dy}{du} = g'(x)f'(u)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots ㉒$$

となるのが合成関数の微分公式です。これまでと同様に微分の定義式で$f(g(x))$の導関数は

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

です。言うまでもありませんが、この時の関数$g(x)$の$x+\Delta x$での値は$g(x+\Delta x)$であり、関数$g(x)$のxでの値は$g(x)$です。$g(x+\Delta x)$と$g(x)$の値の差を次の式のようΔuと定義します。

$$\Delta u \equiv g(x+\Delta x) - g(x) \qquad \cdots\cdots \quad ㉓$$

この式を変形すると、

$$g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta u$$

なので、㉒の式の右辺$g(x+\Delta x)$にこれを代入すると、

$$\frac{d}{dx}f\big(g(x)\big) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(g(x)+\Delta u) - f(g(x))}{\Delta x}$$

となります。これに、$\frac{\Delta u}{\Delta u} = 1$を掛けても値は変わらないので、

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{\Delta u}{\Delta u} \times \frac{f(g(x)+\Delta u) - f(g(x))}{\Delta x}\right\}$$

と表せます。次に分母の値を交換しても値は変わらないので、ΔuとΔxを交換し、$u = g(x)$の関係を使うと、

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{\Delta u}{\Delta x} \times \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\right\}$$

となります。さらに$\frac{\Delta u}{\Delta x}$の分子の$\Delta u$に㉓の式を代入すると、

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left\{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \times \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\right\}$$

となります。また、㉓の式から$\Delta x \to 0$の場合には$\Delta u \to 0$となることがわかります。よって、

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \times \lim_{\Delta u \to 0}\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}$$

となります。これに微分の定義式を使うと、

$$= \frac{d}{dx}g(x) \times \frac{d}{du}f(u) = \frac{du}{dx} \times \frac{dy}{du}$$

となります。これで合成関数の微分公式が証明できました。

(7) 合成関数の微分公式を使ってみよう

合成関数の微分を練習してみましょう。例として、$f(x) = b(x-a)^2$をxで微分する場合を考えます。このとき、

$$u = g(x) = x - a$$

と置くと、

$$f(x) = f(u) = bu^2$$

になります。よって合成関数の微分公式を使うと、

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\{b(x-a)^2\}$$

$$= \frac{d}{dx} g(x) \times \frac{d}{du} \ (bu^2)$$

となり、このとき、

$$\frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x - a) = 1 \text{ と } \frac{d}{du} \ (bu^2) = 2bu$$

なので、

$$\frac{d}{dx} f(x) = 2bu = 2b(x - a)$$

となります。

(8) 対数関数の微分

さて、公式を紹介したところで対数関数の微分を求めてみましょう。例として$y = \log_a x$をxで微分した場合を考えます。微分の定義式を使うと、

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x}$$

となります。なお、ここでは⑦の式も使いました。次に、$t \equiv \frac{\Delta x}{x}$という変数変換を行います。この場合、$\Delta x \to 0$のとき$t \to 0$であり、$\Delta x = xt$です。よって⑥の式をつかって、

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{xt} \log_a(1 + t)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}} \qquad \cdots\cdots ㉔$$

と表せます。この式に含まれる$\lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}}$は次の式のように記号$e$で表して、自然対数の底と呼びます。

$$e \equiv \lim_{t \to 0}(1 + t)^{\frac{1}{t}} = 2.7182 \cdots$$

この数をネイピア数やオイラー数と呼ぶこともあります。このeを使うと㉔の式の続きは、

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{x} \log_a(1 + t)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \log_e a} \qquad \cdots\cdots ㉕$$

となります。ここでは、⑧の底の変換公式が成り立つことを使いました。これが対数の微分公式です。

ここで記号eについて説明します。対数の説明で見た、「底が10である対数」を常用対数と呼びます。常用と呼ばれるようによく使われる対数です。10を底とすると10の何乗であるかがわかるので、工学分野でよく使われます。一方で、自然科学の分野全体では「自然対数の底（ネイピア数）e」を使う対数もよく使われていて、これを自然対数と呼びます。図4は自然対数$y = f(x) = \log_e x$のグラフです。

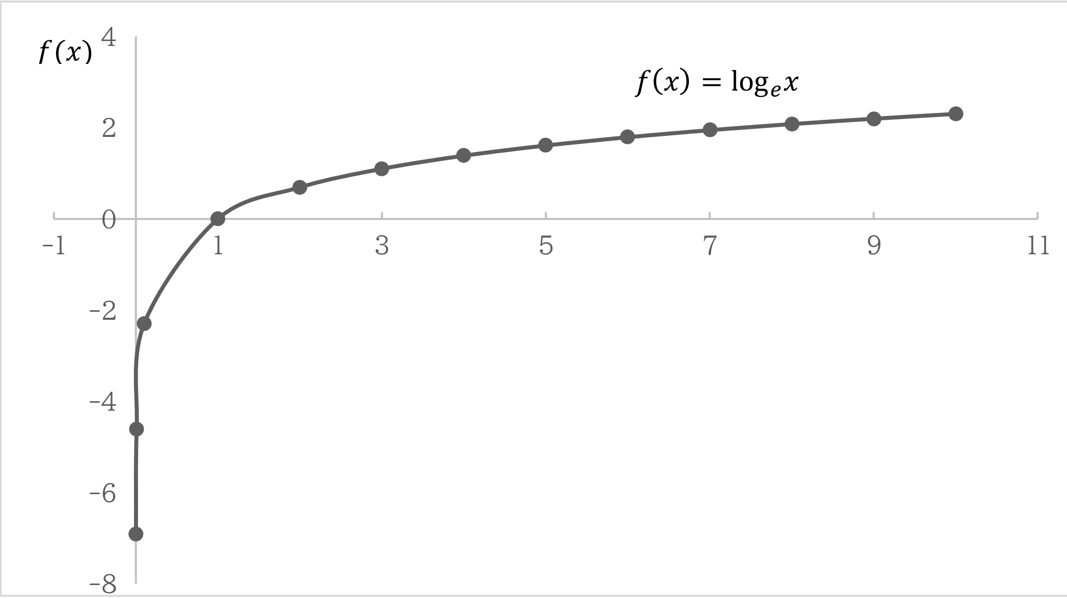


図4　自然対数のグラフ

自然対数の微分を考える場合は㉕の式で$a = e$とおけばいいので、

$$\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x\log_e e} = \frac{1}{x} \qquad \cdots\cdots ㉖$$

になります。

(9) 指数関数の微分

自然対数の微分公式が求められたので、これを使って次のような関数の微分を考えてみましょう。

$$f(x) = a^x \qquad \cdots\cdots ㉗$$

この関数は「aを底にする指数関数」と呼び、この微分はよく考えてみると難しく思います。そこでまずは指数に注目してみることにします。指数に注目するときに便利なのは対数なので、両辺に底がaの対数をとってみます。すると、

$$\begin{aligned}\log_a f(x) &= \log_a a^x \\ &= x\end{aligned}$$

となります。この両辺をxで微分すると、

$$\frac{d}{dx}\log_a f(x) = 1$$

となります。一方、左辺は合成関数の微分公式を使って、

$$\frac{d}{dx}\log_a f(x) = \frac{df(x)}{dx} \times \frac{d}{df(x)}\log_a f(x)$$

と表せます。対数の微分公式を使うと、

$$= \frac{df(x)}{dx} \times \frac{1}{f(x)\log_e a}$$

となります。よって、

$$\frac{df(x)}{dx} \times \frac{1}{f(x)\log_e a} = 1$$

と表すことができて、これを整理すると

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x)\log_e a$$

が得られます。よって㉗の式から、

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a \qquad \cdots\cdots ㉘$$

と表せます。これが指数関数の微分公式です。

さらに、$a = e$の場合には、

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \log_e e \ = e^x \qquad \cdots\cdots ㉙$$

となります。したがって、「自然対数の底eの指数関数e^xを微分すると、もとと同じ指数関数e^xが得られる」ということがわかりました。微分しても形が変わらないというのはとても面白い性質です。

※この後三角関数の微分を説明したかったのですが、ページの都合上省略する形となってしまいました。三角関数の積分も同じく省略させていただきます。三角関数の微分については一昨年(2019 年)の部誌に説明があるのでそちらをご覧ください。

3. 関数の積分

(1)積分とは何か

微分の基礎を学んだところで、積分についても見ていきましょう。積分とは何かを一言でいうと、「微分の逆」です。ここでは、積分を理解するために、車や電車の移動距離を速度から計算する場合を考えてみましょう。仮に1秒ごとの速度だけがわかっていて、その移動距離 l を知りたい場合があったとします。その場合は、

$l =$ (時間0での)速度×1秒
　＋(1秒後の)速度×1秒
　＋(次の1秒後の)速度×1秒　　…… ㉚
　＋…

と足し算を繰り返すことで、大体の移動距離がわかることもあるでしょう。しかし、車や電車が複雑な

動きをしているとき、もっと正確な 0.2 秒刻みや 0.1 秒刻みのような、短い時間Δxごとの速度を知っておくほうがいいわけです。例えば一定の割合で加速する車があり、その車の速度が図5のように変化するとき、その移動距離は直線と時間を表す横軸に挟まれた三角形の面積が等しいことがわかります。また、図5では 1 秒毎に速度を計って移動距離を求める場合と、0.2秒ごとに速度を計測して移動距離をもとめる場合を比べています。移動距離 l はどちらも細長い長方形の距離の面積の和で、

$l =$（時間0での）速度×1秒
　＋（短い時間Δx後の）速度×1秒
　＋（次の短い時間Δx後の）速度×1秒
　＋…

で求められますが、図5の右図の 0.2 秒刻みのほうがグラフと直線との隙間が小さくなって「真の移動距離」に近くなっています。

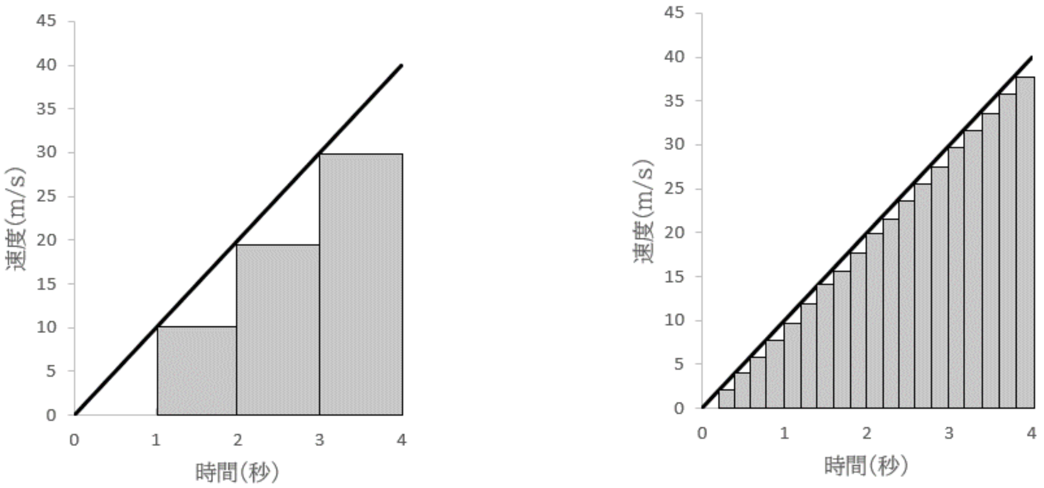


図5　1 秒毎に速度を図る場合（左図）と 0.2 秒ごとに速度を図る場合（右図）の比較

㉚の式のような和をとる計算は、次の式のように和を表す記号Σ（シグマ）を使って表します。

$$l = \text{各時間での速度} \times \Delta x$$
$$= \sum (v \times \Delta x)$$
$$= \sum v \Delta x$$

シグマを用いて表すと、飛び飛びの時間ごとに足し算をするというイメージですが、速度がもっと微妙に変化する場合にも対応できるように、極限的に短い時間間隔dxごとに和をとることにしましょう。この極限的に短い時間間隔dxで和をとることを積分と呼びます。積分の場合には、Σではなくアルファベットの S を縦に引き延ばした記号$\int$（インテグラル）という記号を使って表します。したがって、移動距離 l を積分を使って表すと、

$$l=\int_{x_1}^{x_2} v dx$$

となります。これを「距離は速度の時間積分である」と表現します、インテグラルの右側についているx_1とx_2は、時間x_1からx_2まで積分することを表します。このように、積分の範囲を指定する積分を定積分といいます。

積分にはもう1種あって、それを不定積分と呼びます。ナブラ演算子ゲームでの「積分」はこの不定積分です。なので、今回は不定積分について説明していきます。関数$f(x)$の不定積分は、

$$\int f(x)\, dx$$

と書き、定積分との違いとしては積分する範囲を指定しない（定まっていない）のが特徴です。ここで積分される関数$f(x)$を被積分関数と呼びます。不定積分の理解には、ペアとなる原始関数と呼ばれる関数も頭に入れる必要があります。ある関数$F(x)$を微分すると$f(x)$になるとき、この$F(x)$を原始関数と呼びます。式で書くと、

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

です。ただし定数をxで微分するとゼロになるので、$F(x)$に任意の定数Cを加えた$F(x)+C$を微分しても次の式のように$f(x)$になります。

$$\frac{d}{dx}\{F(x)+C\}=f(x) \qquad \cdots\cdots \text{㉛}$$

この任意の定数Cを積分定数と呼びます。不定積分はこの式の逆で、「$f(x)$を与えると$F(x)$+Cが求まる」という計算をおこなうもので、原始関数との関係を表すと

$$\int f(x)\, dx = F(x)+C \qquad \cdots\cdots \text{㉜}$$

です。

（2）不定積分の公式

㉛や㉜の式で見たように、微分の逆は不定積分なので、微分の公式から不定積分の公式が導けます。例えば、よく使われる微分の公式である⑰の式を使ってx^{n+1}を微分すると、

$$\frac{d}{dx}x^{n+1}=(n+1)x^n$$

となり、両辺を$n+1$で割ると，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$$

となります。これを不定積分の公式に書き換えると、

$$\int x^n\, dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

になります。ただし、分数の分母がゼロになるのは不可なので、$n+1=0$の場合（すなわち$n=-1$の場合）は除きます。同様に、指数関数、対数関数の不定積分を求めると以下のようになります。

㉕の式の$\frac{d}{dx}\log_a x=\frac{1}{x\log_e a}\ (x>0)$から、

$$\int \frac{1}{x\log_e a}dx=\log_a x+C$$

㉖の式の$\frac{d}{dx}\log_e x=\frac{1}{x}\ (x>0)$から、

$$\int \frac{1}{x}dx=\log_e x+C$$

㉘の式の$\frac{d}{dx}a^x=a^x\log_e a$から、

$$\int a^x\log_e a\,dx=a^x+C$$

$$\therefore \int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log_e a}+C$$

㉙の式$\frac{d}{dx}e^x=e^x$から

$$\int e^x\,dx=e^x+C$$

（3）部分積分の公式

　不定積分の公式はいくつかありますが、今回は部分積分の公式を説明します。部分積分の公式は関数の積の微分公式である⑲の式を使って導くことができて、関数の積を積分したいときのほかにも、様々な関数の積分で活躍します。

まず、⑲の式で左辺に$f'(x)g(x)$を移すと、

$$f'(x)g(x)=\{f(x)g(x)\}'-f(x)g'(x)$$

となります。ここで両辺を不定積分すると、

$$\int f'(x)g(x)\,dx=\int\{f(x)g(x)\}'dx-\int f(x)g'(x)dx$$

となります。右辺の$\int\{f(x)g(x)\}'dx$は$f(x)g(x)$を微分した後に不定積分するということなので、結局もとの$f(x)g(x)$になります。よって、

$$\int f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$$

が得られます。これが部分積分の公式です。

(4) 対数関数の積分

さて、公式が導けたところで、この公式をつかって$y = \log_e x$の対数関数の積分をしていきます。

$$\int \log_e x \, dx = \int 1 \times \log_e x \, dx$$

$$= x \times \log_e x - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

$$= x \log_e x - x + C$$

となります。ここでは、$\frac{d}{dx} x = 1$と$\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$の関係を使いました。

＜微積分の活用＞

ここまで、微分と積分について述べてきましたが、日常生活では一見使わなそうだなと感じた方も多いのではないでしょうか。そこで、微分と積分がどのような形で応用されているのか、それぞれ例を紹介したいと思います。

①微分の活用

・ロケット

ロケットは複雑な機械で、風など自然界に存在するいろいろな要因による影響がほぼなくなり、きちんと決められた通り飛ぶように、大量の部品が付いています。ロケットは、ロケット方程式というもので記述されるように飛びます。ロケット方程式で言えば、ある一瞬のロケットの噴射状況を観察して、例えば噴射前（燃料を入れたときの重さなど）の情報と組み合わせることで、どのくらいの人工衛星をどの軌道にのせるか、ということを導けます。ロケットが計画通りに飛ぶために必要なロケット方程式に、微分が使われているというわけです。

②積分の活用

・積分と微分は、簡単に言えば対になっています。そのため、微分が使われているところでは基本的に積分も使われています。

＜ナブラ演算子ゲーム＞

ここからは、今までの内容を踏まえたうえでそれを利用したカードゲームの話をしていきます。それは、「ナブラ演算子ゲーム」です。

①ルール

まずはルールについてです。

まず、適当な紙を線で等分し、それぞれ自分の場（陣地のようなもの）と相手の場にわけます。そして、それぞれの場にある関数、数のことを「基底」と呼ぶことにしましょう。

初期状態は、お互いの場に「$1,\ x,\ x^2$」がある状態です。そして、1 ターンにいずれかの基底に一回、「操作」を行います。このゲームの「操作」は、大きく分けて 2 つあります。

Ⅰ．自分もしくは相手の場に基底を追加する。

Ⅱ．自分もしくは相手の場にある基底（1 つもしくは複数）に何かしらの計算をする。

そもそもこのナブラ演算子ゲームには、カードが全部で 21 種類（多分）存在します。そのうちⅠのように直接場に追加できる基底のカードは 7 種類で、実際に効果が見込めるものが 6 種類です（0 というカードがあり、これは場に追加すること自体は可能ですが、無いものとして扱われるためです）。残りの 14 種類や、Ⅰで使える基底のカードも、Ⅱで行う計算の中で用いることができます（基底×x など）。

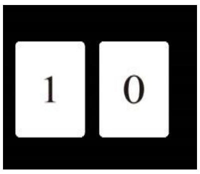
ⅠとⅡの操作を繰り返し行い、相手の基底をすべて0にした（なくした）方が勝ちです。

ここで、それぞれのカードを紹介していきます。

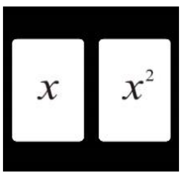
まずは自分の場に置ける、基底のカードについてです。

1. 1、(0)

これは、微分一回で消えてしまいますが、lim系では消えないので、その面では強いカードです。また、÷と一緒に使うことによって基底を強化することもできます（後に③で説明します）。0の場合は、×または÷と一緒に利用することでどんな基底でも消すことのできる最強の組み合わせになります（どんな基底でも、×0、または0÷その基底、という計算をすれば必ず0になるため）。

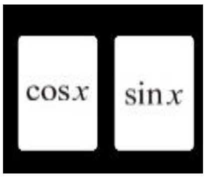


2. x、x^2



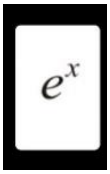
これは、元から場にある基底でもあって、微分することで指数が減っていき、積分では増えていきます。

3. $\cos x$、$\sin x$



これの微分と積分には本当は－と＋が関係しているのですが、このゲーム内では $\cos x$ と $\sin x$ が変わるだけ終わります。また、$\sin x$ を $\cos x$ で割ることで $\tan x$ を作ることもできます。

4. e^x



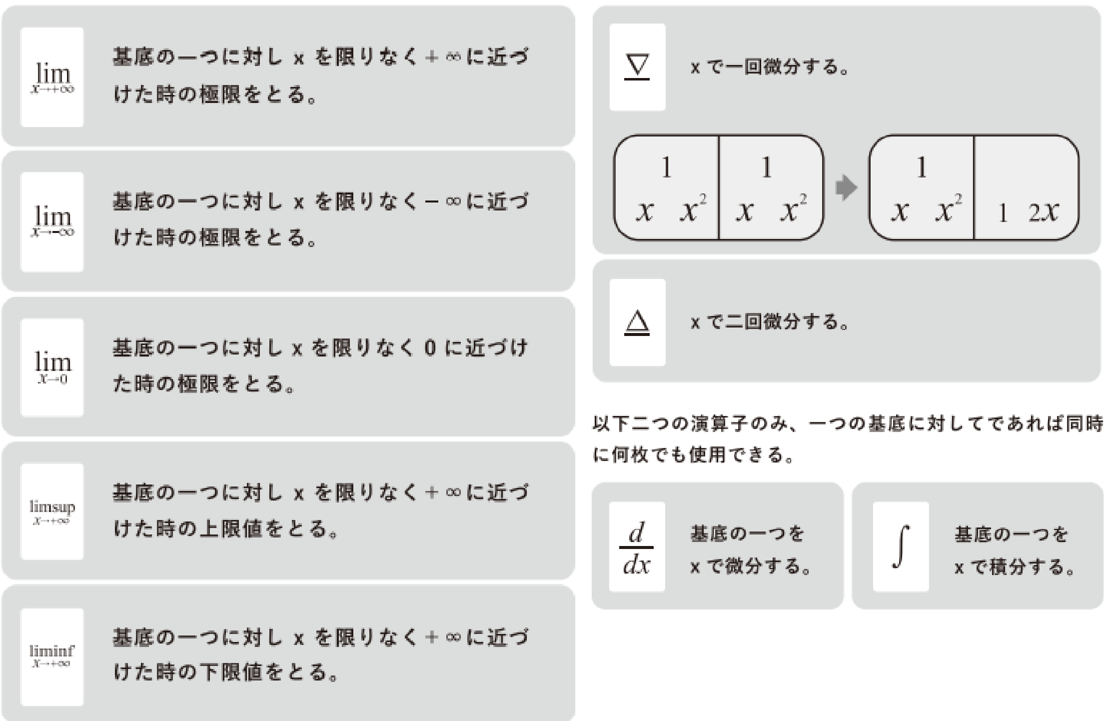
これは、ネイピア数である e を x 乗した関数を表したカードで、原点を通らないため、logで x にする、また、lim系のカードを使うなどして消します。

次に、相手の基底に攻撃をするカードです。ここでの詳しい説明は省略させてもらいますが、

$$\lim_{x\to+\infty} \quad \lim_{x\to-\infty} \quad \lim_{x\to 0} \quad \limsup_{x\to+\infty} \quad \liminf_{x\to+\infty}$$

$$\nabla\text{（ナブラ）} \quad \Delta\text{（ラプラシアン）} \quad \frac{d}{dx} \quad \int\text{（インテグラル）}$$

などがあります。



<∇, Δの説明>

∇は相手の場にあるすべての基底を1回ずつ微分します。Δは相手の場にあるすべての基底を2回ずつ微分します。したがって、例えば自分の場にxしかなかった場合、相手が次のターンでΔのカードを出すとxは2階微分されて0になり、負けてしまいます。このような状況では相手がΔを持っていたときのことを考えて自分の場に基底を追加しておくと良いでしょう。

<d/dx, $\int$の説明>

d/dxと$\int$は1つの基底を微分、積分するものです。また、d/dxのカードを出すならばd/dxを、$\int$のカードを出すならば$\int$を2枚以上出すことができます。

<limの説明>

ここで最後に、lim(リミット)の説明をしておきましょう。ここは、前に記した内容にもかかわってくるため大切です。一言で説明すると、$\lim_{x \to y}$というのは、xという値をyという値に限界まで近づけるということです。ここで大切なのは、あくまで"限界まで近づける"のであり、xとyを同一の値になるまで近づけるわけではないというところです。

②通常と異なる計算方法

・ある関数を定数倍したものは、1つの場に複数個存在してはいけない(線形従属ルール)。

・場にある全ての実数は、線形従属ルールを踏まえ、1に統一する。

③簡単な戦術

例えば、このゲームのルールでは$\sin x$と$\cos x$は微分・積分するとそれぞれ$\cos x$、$\sin x$になることと、先程紹介した線形従属ルールを利用することで、相手の基底に$\sin x$、$\cos x$が同時に存在するときに微分もしくは積分をどちらかにすることで、そのカードを消すことが出来ます。

また、xはそのままだと微分2回だけで消されてしまうカードですが、「÷」と「1」のカードを使って、「$1 \div x$」という式を作ることでxが$1/x$になり、微分、積分だけで消すことが出来なくなります。

他にも、良いカードがほとんど無く、新しいカードに交換したいときは例えば「$x \times 1 \div x$」のような式を作れば、元の基底を変化させずに、カードを5枚交換させることが出来ます。

④魅力

このゲームでのカードの使い方は主に、カードを単体で場に置く、カードを複数枚組み合わせて式を作る、基底にカードを組み合わせて式を作ることの3種類に分けられます。その中でも、カードを組み合わせて式を作って相手の基底を崩し、自分の基底を強化する。これがこのゲームの魅力の1つだと思います。

第2章

2 週間で「数学オリンピック(JMO)」本選出場への体験記

はじめに

今年は、COVID-19 の影響で、中学生の「ジュニア数学オリンピック(JJMO)」は中止となり、中 2 だった私は、高校生の「数学オリンピック(JMO)」を、無理だろうと思いつつ受験した。

ところがたった 2 週間、問題集や過去問を解いただけで、今年も予選に合格して全国で 90 人以内の本選に出場するというミラクルが起きた。「それにしても人生には思いがけないことが起こるものだ。とりあえずなんでもチャレンジしてみるものだ。」と驚いてしまった。

しかし、なぜたった 2 週間の勉強で合格できたのだろうか？これから JJMO・JMO にチャレンジする人のために少しでもノウハウを伝えたいと思い、昨年の部誌の体験記の続編ということで、今年も書いてみることにした。

●1 年ぶりの勉強でわかったこと

今年は感染予防のため初のオンライン開催だったこともあり、予選突破したところで A ランクのメダルもないらしく、「どうせ開成や灘の高校生なんかと一緒に本選出場などできるわけないだろう。」と、かなり投げやりな気持ちでいた。直前まで英検に全力を尽くしていて、JMO 受験の 2 週間前になってしぶしぶ過去問を 1 年ぶりに解いてみた。ところが驚いたことに、昨年勉強したことをまったく忘れていなかった。それどころか昨年解けなかった問題までひらめくようになっていて、奇跡的に予選を突破できた。どうやら昨年勉強したことがしっかり身についていたらしい。

ただ、“2 週間の勉強で合格”というのには少々カラクリがある。じつは JJMO と JMO の問題の難易度は大差ないのだ。JJMO は中学生で才能のある人を JMO へ導くための大会なので、予選についていえば、どちらも 12 問のうち 6 問くらいは同じようなレベルなのである。そのため、昨年私が JJMO の本選に出場できた時、すでに JMO も解けるレベルまでそこそこ達していたと思われる。

だから、なるべく早いうちにしっかりやっておく方が得なのかもしれない。

●どんな勉強をすればよいか

ただし、そんなに簡単に私が JMO レベルに達したわけではない。

昨年の部誌で私は、「3 ヶ月でジュニア数学オリンピック(JJMO)本選出場への体験記」というタイトルで書いたのだが、本当につらい勉強だったのはまぎれもない事実で、数学が大好きな私ですら、あまりにも難しすぎて大嫌いになりかけた。

当時中 1 だった私は、数学オリンピックというものを全く知らず、みんなが受験するというので軽いノリで団体申込をしてしまったものの、どのような勉強をすればよいのか全くわからず途方に暮れた。そして受験まで 3 ヶ月しかないことに焦り「自分だけ 0 点だったらどうしよう。みっともないだろう

な。」という不安や恥ずかしさに駆られ、しかたなく一念発起で平日は 3 時間、休日は 10 時間、冬休みも正月も返上で 3 ヶ月間毎日、朝から晩まで無我夢中で数学に取り組んだ末の結果だった。

JJMO・JMO の勉強は基本的に独学が中心となる。私はマイペースな人であり、独学で中学受験をしたため独学にはさほど抵抗はなかったのだが、たとえば中学受験の算数の難しさを 1 だとすると、JJMO・JMO の難しさは 20 ぐらいだと体感して、中学受験の 20 倍くらいの集中力が必要だと思った。だから、よほどの天才でなく、私のように「ただ数学が得意だ」という程度で JJMO・JMO を目指す人は、かなり勉強時間を作る必要があると思っていた方がよい。

●教えられること・教えられないこと

チャレンジしたい人は、これを読んで自分自身で時間をかけて「基礎学力」をつけてくれたらうれしい。例えば中学数学なら「ランクアップ中学数学シリーズ」や、高校数学なら「青チャートⅠA・ⅡB」などの本を使ってしっかり身につけるべきだと思う。なぜかというと、もし後輩に JJMO・JMO の問題を教えてくださいと言われても、私には教える自信がない。意地悪でもなんでもなく、かつて高校生の先輩が JMO 対策の講義をしてくれた時に、中 1 の私には先輩の言っていることが何一つわからなかった。質問しようにも、何がわからないかもわからないほどチンプンカンプン。2 時間の講義の間、宇宙人の話を聞いているようでずっとフリーズしていたのを今でも鮮明に覚えている。

半泣き状態で帰宅し、その日を境に、少しでもみんなに追いつこうとたくさんの参考書や問題集を朝から晩までみっちり数学漬けになって 3 ヶ月間、何度も挫折しながら、無我夢中で勉強した。それは JJMO・JMO の問題を解くには、中学数学全部と高校数学ⅡB(一部の範囲)までを、まずしっかりやらなければダメだとわかったからだ。

JJMO・JMO の問題は受験数学を基礎として、さらにひねった問題が多いので、土台となる基礎学力をつけてからでないと、後でつまずく。私は時間がないこともあって最短で要領よくやろうとしたが、結局つまずいて基礎や関連する単元に何度も戻っての繰り返しとなった。受験のようにわかりやすいテキストもない。自分自身でひたすら実力を積み上げていくしかない。だから、問題の解き方を教えてもらったところで、高校数学すら知らなければ JJMO・JMO は理解できず、スタートラインにすら立っていないと痛感したからだ。

最近、体調が悪くほとんど部活に参加できず、しかたなく自宅で体調の良い時に少しずつ数学を勉強していた。でも、これは JJMO・JMO の勉強法としては正しいと思う。JJMO・JMO は、みんなとわいわい楽しく教えあって合格できるようなレベルの問題ではなく、1 つでも多くの問題に挑戦して解法やひらめく感覚を蓄える必要があると思うからだ。部活では、先輩たちが楽しそうに解き方を相談しているが、あれほどのレベルに達するまでは、ひたすら高校数学の基礎＋過去問を解かないとダメだと思う。

もし本気で数学オリンピックに合格したいと思う人は、自分との孤独な闘いを終えてから、先輩に教えてくださいとたずねてほしい。きっとすばらしいアドバイスがもらえるだろう。

●数学オリンピックにチャレンジする意義とは

JMO について質問があったので、自分の経験から、挑戦する意義を質問形式で答えてみる。

Q. 大学で役立つのか?役に立たないなら、なぜチャレンジする人がいるのか?

A. 大学でそれほど役に立つわけでもないらしい。大学受験をする人なら、限られた勉強時間という点では、チャレンジするより受験勉強に時間を費やすべきだと思う。ただ、いろいろな数学好きな人の意見を聞くと、受験数学しかやっていない人と、JMO に挑戦した人では、やはり挑戦した人は解答に至る道筋を 1 つだけでなく"あれこれ瞬時に考えられる"らしい。全国模試などで数学が得意だったので数学がとてもできると思っていた人でも、大学に入学して JMO 経験者の同級生と話をしていると、学校でも予備校でも習わなかったような幅や奥行きのある数学の考え方を知っていることに驚き、中高一貫校などで JMO にチャレンジした人がうらやましいとの意見をよく聞く。

また、大学の推薦入試の資格として使える場合もあるので(我が校でも今年から内部推薦の評価対象として使えるようになるらしい)、もし数学が好きなら、一度くらいチャレンジしてみると、人生で役立つことがあるかもしれない。

Q. 中学生のジュニア数学オリンピック(JJMO)の「本選」と、高校生の数学オリンピック(JMO)の「予選」はどっちが難しいのか?

A. どちらも「予選」は答えを書くだけで、「本選」は途中の式もすべて点数になる。本選は 4 時間で 5 問を解くのだが、解答用紙は B4 用紙 5 枚で、そこに式と答えを書くので数学のセンスがすべてわかってしまう。難易度を山で例えるなら、予選が富士山で本選はエベレストのようだと私は思う。私のように努力してやっとの思いで本選に行くと、世の中にはとんでもない天才がいるのだと、うちひしがれて帰ってくることになる。数学が得意などと思うのも恥ずかしくなるほどだ。また自分など所詮数学の凡人なのだと思い知り、妙にすがすがしい気持ちにさえなる。しかし、本選に挑戦できたことは自分の人生にとって、とても良い経験だったと思う。

JMO にチャレンジするためには、高校数学を基礎からみっちり身につけなければならない。昨年の部誌にも書いたが、私は「どうせいつかやるのなら、今のうちにやってしまおう。」という気持ちで始めたので、途中から実力がついて独学が楽しくなった。私のように高校数学の予習のつもりでやれば気楽にやれると思うので、数学好きなら、ぜひ一度チャレンジすることをおすすめしたい。

●今年の問題と JJMO・JMO の解き方へのアドバイス

3 時間で 12 問は時間との闘いなので、ひらめきの速さと計算ミスをしないことが重要だ。

問 1

互いに素な正の整数 m, n が $m+n=90$ をみたすとき積 mn としてありうる最大の値を求めよ。

今回は初のオンライン開催ということで、入力チェックのためなのか、問 1 は 10 秒以内で答えが出るような超簡単なサービス問題らしく、答えは「2021」(ちなみに$(m, n)=(43,47)$、順不同)。

答えが「2021」と西暦そのものなのは珍しいのだが、毎年問題の中に、その年の数字(西暦とか年

号)が入っていることがあるので、数オリを楽しんでいる人達では、事前に年号の数字を素因数分解したり、平方数の和を計算したりしておいて、問題の予想をしているらしい。

問 4
黒板に 3 つの相異なる正の整数が書かれている。黒板に実数 a, b, c が書かれている時、それぞれを $\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}$ に書き換えるという操作を行う。この操作を 2021 回行ったとき黒板に書かれた 3 つの数はすべて正の整数であった。この時、最初に黒板に書かれていた 3 つの正の整数の和としてありうる最小の値を求めよ。

ネットの口コミだと、この問 4 に手こずってしまった人が多かったそうだ。
昨年の部誌にも書いたが、私の体感や口コミによると問題の難易度はこのような感じ。
問 1～問 5→計算ミスをしないで確実に 5 問全部正解すべき。
問 6～問 8→やや難しいのでここで 2 問以上解けると合格できる可能性大。
問 9～問 12→天才しか解けないので凡人はスルーすべき。
時間切れにならないためには、通常は問 1 から順番に解いていくのがよい。ところが今年は 4 問目で予想外の時間の浪費に焦って、後の問題が時間切れで解けなくなった人が多かったようだ。私も 10 分かかっても答えが出なかったので、かなり焦った。「年度によっては合格点が 5 点という難易度が高い年もあるので、今年は難しいのかしら?」と不安に思いつつも、気持ちを切り替えて問 4 を後回しにしたところ、問 7 までサクサク答えが出たので、心を落ち着かせて問 4 に戻り、和だけでなく差にも注目することをひらめいて、なんとか正解にたどりつけた。
答えは $3+3\times 2^{2021}$　　$a<b<c$ とすると、$(a,b,c)=(1,\ 1+2^{2021},\ 1+2\times 2^{2021})$
3 時間をうまく使わないと合格は難しいので、JMO は瞬時にひらめくことと、あきらめずにチャレンジする気持ちを養えると思う。

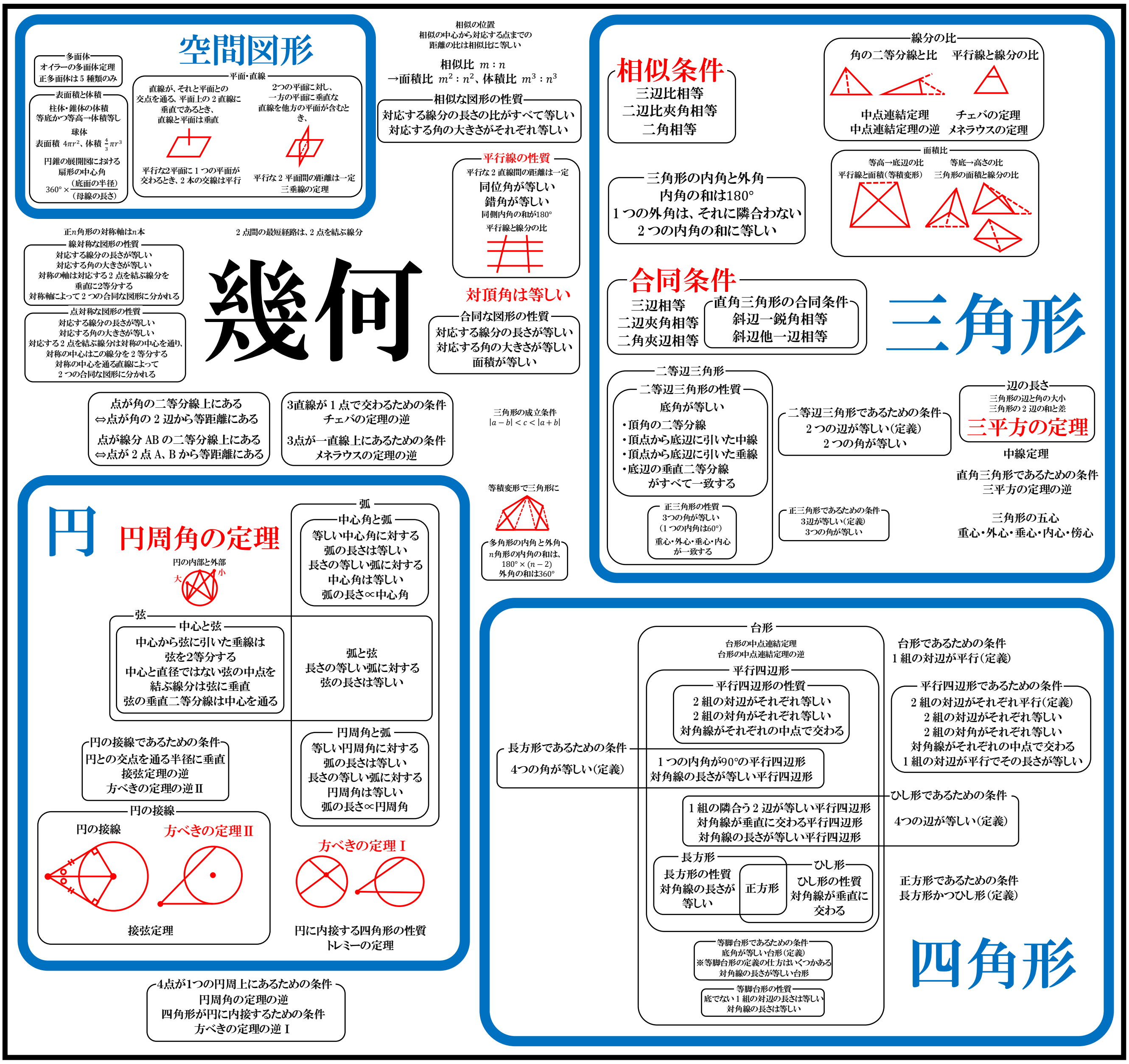
おわりに

中学に入学したばかりの 2019 年に、私が部誌に初めて投稿した内容を見てもらえば、部内で数学のレベルが一番ビリだったことがよくわかる。毎年の部誌を見てもらえば 1 年ごとに私の数学力がアップしていった様がわかるだろう。たとえ今あまり実力がないと思っている人でも、やり方や数学に取り組む時間によって急激に実力を上げられるので、この体験記をもとに数学オリンピックにチャレンジしてくれたらうれしい。
私は、数学オリンピックと数学研究同好会の仲間や先輩のおかげで「人生には思いがけないことが起こるものだ。とりあえずなんでもチャレンジしてみるものだ。」という大切なことを学んだ。
数学オリンピックに挑戦してみてください。世の中にはどんなにすごい数学猛者たちがいるかを、ぜひその目で確かめてください。
きっとあなたの人生も変わると思います――。

第3章

中学幾何の全体像を1枚の地図にまとめてみた

早実中等部で習う、図形の様々な性質や定理を１枚の地図にまとめました。実際に問題を解くうえでの性質または定理どうしの関係を意識してまとめたので、早実の中等部生で幾何をひととおり勉強したよ、という方はぜひ参考にしてください。1年生や2年生の方もぜひ勉強に役立ててください。（※学習指導要領の改訂により、学習内容が変更になる可能性があります。）



コラム1

数学のテスト相談所

こんにちは。数研 OB、大学 2 年の W.T.と申します。ここでは数学の難しい話から離れて、テストの点数をあげるための方法について考えてみようと思います。この記事は、中高でのテストや模試などをイメージしていますが、小学生の方にも共通する部分があるかもしれません。

★図をていねいに描くことは超大事！

まず、1 つ目に伝えたいことは「図をきちんと描こう！」ということです。面倒でも必ず書きましょう。ていねいな図を描くことで、いろいろな情報を正確に整理することができます。以下は私が気を付けていることです。

- ✓ **x軸とy軸の縮尺（メモリの幅）をなるべく統一する**

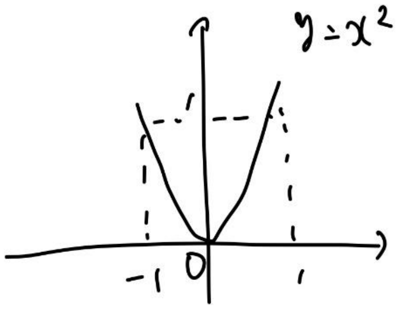
  これは $y = x$ というグラフを描いた時にその傾きが $45°$ になるように図を描く、ということです。こうすることで，バランスのとれた図になります。ただし $y = 30x^2$ のような、急激に増加するようなグラフなどは無理にこうする必要はありません。

- ✓ **グラフの線は、1 本の線で書き、グラフの傾きもなるべく正確に**

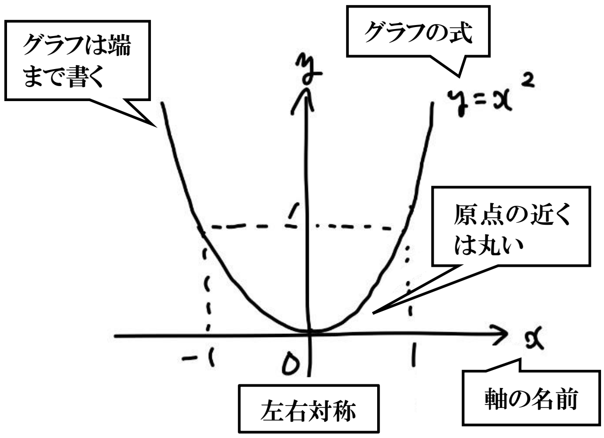
  数学のグラフはデッサンではないので、線を重ねて書くことはむしろ不適切です。傾きについては、例えば $y = 2x$ と $y = -\frac{1}{2}x$ のグラフは直交するように書くと正確ですね。曲線を描く時には、曲がり具合にも気を付けるとよいです。例えば、 $y = x^2$ のグラフは原点のあたりが丸くなっています。

- ✓ **グラフは端まで書き、グラフの式や交点の座標、切片を書き入れる**

  軸を書いたらその名前、グラフを描いたら数式をセットで書いてしまいましょう。
  切片や交点は書ける場合には書いておきましょう。



ちょっと雑な図



丁寧な図

ここで述べたことは、答案に書く際には特に重要です。また、問題用紙や計算用紙に図を描く時には大きめに図を描くと良いでしょう。

正確な図を描けば、答えが誤っているときに、その答えと図の整合性に違和感を覚えることがあります。もし、「図では面積が 1 より小さそうなのに、出た答えが 3 だ～」となったらどこかでミスをしたことに気づけますね。

それに答案に図を書いておくだけでも点をもらえるかもしれませんね。ということで図を丁寧に書くメリットはめちゃめちゃ多いのです！

★ミスを減らしたい！！！

計算ミス・ケアレスミスは、小学生から大学生まで全国共通の悩みのタネだと思います。私自身、簡単なミスで一億点ぐらい損してきました…。一通り解き終わって見直ししたのに気づかなかったということもよくありますね。私は「見直しって結構難しいのではないか？」と思います。なぜなら答案を書いているときは、自分が正しいと思い込んでいるので間違いに気付きづらいのです。見直しの際には「自分は絶対間違えている！」と思って見直しましょう。

見直しでまずやることと言えば、検算ですね。出てきた答えを問題文の式に代入して正しいかどうかチェックできる場合は必ずやっておきたいです。

そして、上に書いたように図をていねいに描くことで、勘違いや見落としに気づけるのでミスに気づきやすくなります。簡単な問題でも、難しい問題でもしっかり図を描くことを心がけましょう。

もう一つは、いろいろな数字を当てはめてみるということです。例えば、確率の問題で答えが $\frac{n^3-n+2}{6n^2}$ になったとします。このとき n にいろいろな値を入れてみましょう。 $n=1,2$ を代入すれば $\frac{1}{3}$ 、$n=3$ を代入すれば $\frac{13}{27}$ になり特に問題ないように思えます。しかし $n=10$ を代入してみると分母は 600 、分子は 992 となり確率が 1 を超えてしまいます。このように小さい数や大きい数を入れたときにおかしくないか確認することでミスに気づけることがあります。問題によっては $n=2$ のときだけ別に考えなければいけない、という場合もありそのような間違いに気づける可能性もあります。

今回 2 つのアイデアを紹介していきましたが、間違えやすいところは人それぞれですので自分なりの「ミス撲滅対策法」を見つけられるとよいです。ただ、今回紹介したことは、数学のテストでは役に立つはずですし、初めは時間がかかるかもしれないので普段問題集を解く時から実践して習慣づけると良いと思います。

ここまで読んでいただきありがとうございました。

第4章

1 つの問題から

1. はじめに

「数学は楽しい」・「数学は奥が深い」という意見に私が頷く一方で、「本当に？」・「意味が分からない…」と思われる方がいらっしゃるのもまた事実でしょう。

私は、同級生や知り合いから「数学って楽しい/奥が深いの？」という質問をされても、それに対して納得するような回答ができたことがありません。ただ、①1 つの問題からまた新たな問題を考えることができる ②一見異なる問題から問題の解決のヒントを得ることがある ということが(私にとって)その理由だと思ってはいるのですが…

今回、この記事を執筆するにあたってその 2 点が伝わるように意識しました。この記事の中では何問か問題が出てきますが、少しご自分で考えてからそれ以降の部分をお読みになっていただければ、と思います。

※ 各問題には「解法」がありますが、この記事ではどのように解くかという流れを重視しているため、過程を一部省略しているところがあり、他にも数学的によくない書き方になっていたところもあるかと思いますが、温かく読んでいただけたら幸いです。

2. はじめの問題 x

早速ですが、次の問題をご覧ください。

<u>**問題 1.1**</u>
等式 $x + y = 8$ をみたす 0 以上の整数(非負整数) x, y の組は全部で何組あるか。

とにかく、調べていけば答えは出そうです。

(解法 1)

x の値として考えられるものは、0 以上 8 以下の整数。これらすべてについて等式 $x + y = 8$ をみたす非負整数 y がいくつ存在するか調べ、

$$(x,\ y) = (0,\ 8),\ (1,\ 7),\ (2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2),\ (7,\ 1),\ (8,\ 0)$$

の 9 組あることが確認できる。 <u>**答え 9 組**</u>

(解法 2)

○○○○○○○○ と | (○8 個と仕切り 1 個)を 1 列に並べることを考える。ここで、仕切りより左側にある○を「xグループの○」、仕切りより右側にある○を「yグループの○」と名付けると、xグループの○と yグループの○の個数の合計は 8 個であるから、<u>**問題 1.1**</u> の求める組の個数と、○8

個と仕切り 1 個を 1 列に並べる方法の総数は 1 対 1 で対応する。

この総数は、9 個の場所から○8 個の場所を決める(あるいは、仕切りの場所を決める)方法の総数と同じである。したがって ${}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$ つまり 9 組 <u>**答え 9 組**</u>

(補足)

${}_n\mathrm{C}_r$ とは、$\frac{n!}{r!(n-r)!}$ のことです。$n!$ は正の整数 n については n 以下のすべての正の整数の積のことで、$0! = 1$ です(理由は省略しますが、気になる方は調べてみてください)。

(解法 2)についてざっくり言えば、8 を 1 という“最小単位”に分解し、それがxグループか、yグループのいずれかに属することを利用したわけです。

この(解法 2)の考え方、「○8 個」を「○k個」としても成り立ちそうです。<u>**問題 1.1**</u> の条件を少し変更して、以下のような問題にしましょう。

<u>**問題 1.2**</u>

kを非負整数とする。

等式 $x + y = k$ をみたす 0 以上の整数(非負整数) x, y の組は全部で何組あるか。

(解法)

○k個と｜(仕切り 1 個)を 1 列に並べることを考える。ここで、仕切りより左側にある○を「xグループの○」、仕切りより右側にある○を「yグループの○」と名付けると、xグループの○とyグループの○の個数の合計はk個であるから、<u>**問題 1.1**</u> の求める組の個数と、○k個と仕切り 1 個を 1 列に並べる方法の総数は 1 対 1 で対応する。

この総数は、$k + 1$(個)の場所から○k個の場所を決める(あるいは、仕切りの場所を決める)方法の総数と同じである。したがって ${}_{k+1}C_k = {}_{k+1}C_1 = k$ つまり $k + 1$ (組) <u>**答え $k + 1$ (組)**</u>

ということで、やはり成り立ちました(○がないときはどうするの?となるかもしれないので補足すると、$k = 0$ のときは仕切り 1 個の並べ方なので、当然 1 組だけとわかります)。ここで、<u>**問題 1.2**</u> の結果を少し大げさかもしれませんが“定理”としておきましょう。

<u>**定理 1**</u>

kを非負整数とする。

等式 $x + y = k$ をみたす非負整数 x, y の組は全部で $k + 1$ (組)存在する。

3．趣向を変えて

先ほどは**問題 1.1** の一般化をしましたが、今度は他の条件を変えてみましょう。

> **問題 2.1**
> 不等式 $x+y \leq 8$ をみたす非負整数 x, y の組は全部で何組あるか。

(解法 1)

定理 1 を使いつつ調べ上げます。

$x+y \leq 8$ をみたす非負整数 x, y は $x+y=0,\ x+y=1,\ x+y=2,\ \dots,\ x+y=8$ のいずれかをみたすので、それらの総数を求めればよい。

ここで**定理 1** より $x+y=0,\ x+y=1,\ x+y=2,\ \dots,\ x+y=8$ それぞれについて、それをみたす x, y の組は順に 1 組、2 組、3 組、4 組、5 組、6 組、7 組、8 組、9 組存在する。よってこれらの合計は 1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9＝45 より 45 組　**答え 45 組**

なんとか求められました。では、先ほどの(解法 2)は使えるのでしょうか？ 少し考えてみましょう。

まずは、8 を 1 が 8 個ある形に分解してみましょう。しかし、**問題 1.1** と違い、いつでも $x+y=8$ になるわけではありません。せっかく分解しても、この分解されて出てきた 1 の中に、xグループにも、yグループにも属さないものが出てきます。このような 1 を、zグループに属すると考えてみると…なんだかうまくいきそうです。

(解法 2)

$z=8-(x+y)$ とすると、**問題 2.1** は以下のように言い換えられる。

> **問題 2.1'**
> 等式 $x+y+z=8$ をみたす非負整数 x, y, z の組は全部で何組あるか。

以降は、この問題について考える。

○○○○○○○○(○8 個)と｜｜(仕切り 2 個)を 1 列に並べることを考える。

ここで、仕切りにより分けられた 3 か所の○について、左側から順に「xグループの○」、「yグループの○」、「zグループの○」と名付けると、xグループの○とyグループの○とzグループの○の個数の合計は 8 個であるから、**問題 2.1'** の求める組の個数と、○8 個と仕切り 2 個を 1 列に並べる方法の総数は 1 対 1 で対応する。

この総数は、10 個の場所から○8 個の場所を決める(あるいは、仕切り 2 個の場所を決める)方法の総数と同じである。したがって ${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$　つまり 45 組

答え 45 組

ということで、(解法 2)を使うことができました。別の問題に言い換え(＝同一視)をすることで、今回で言えば、「“≦”という条件を、扱いやすくした」ということが言えると思います。いかに複雑な条件を単純なものにするか、というのが難しいところで、考えどころです。

問題 1.1 の際に、任意の(勝手な)非負整数 k についての結果を考えました。それに倣(なら)って**問題 2.1** ではどうなるか、やってみましょう。ここでも、(解法 2)が威力を発揮します。

問題 2.2 kを非負整数とする。 不等式 $x+y\leq k$ をみたす非負整数 x,y の組は全部で何組あるか。

(解法)

$z=k-(x+y)$ とすると，**問題 2.2** は次のように言い換えられる。

問題 2.2' kを非負整数とする。 等式 $x+y+z=k$ をみたす非負整数 x,y,z の組は全部で何組あるか。

以降は、この問題について考える。

〇〇〇〇〇〇〇〇(〇k個)と ||(仕切り 2 個)を 1 列に並べることを考える。

ここで、仕切りにより分けられた 3 か所の〇について、左側から順に「xグループの〇」、「yグループの〇」、「zグループの〇」と名付けると、xグループの〇とyグループの〇とzグループの〇の個数の合計はk個であるから、**問題 2.2'**の求める組の個数と、〇k個と仕切り 2 個を 1 列に並べる方法の総数は 1 対 1 で対応する。

この総数は、$k+2$個の場所から〇k個の場所を決める(あるいは、仕切り 2 個の場所を決める)場合の数と同じである。したがって${}_{k+2}C_k={}_{k+2}C_2=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ つまり $\boldsymbol{\frac{(k+2)(k+1)}{2}}$ (組)

答え $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$(組)

先ほどと同様、定理としてまとめます。

定理 2 kを非負整数とする。 不等式 $x+y\leq k$ をみたす非負整数 x,y の組は全部で $\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ (組)存在する。

$\boldsymbol{\frac{(k+2)(k+1)}{2}}$ の値を $k=0$ から順に調べると、1，3，6，10，15，21，28，36，45，55，⋯ と続きます。

そして、この(解法)より、次のことが予想できます。

予想 1 kを非負整数とする。 不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leq k$ をみたす非負整数 $x_1,x_2,\dots,x_n$ の組の総数は、 等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=k$ をみたす非負整数 $x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}$ の組の総数に等しく、 ${}_{k+n}C_k={}_{k+n}C_n$ (組)である。

この**予想 1** は(解法)を、適宜この予想に合わせて書き換えれば正しいことが証明できます。これを**定理 3** としておきましょう。

今度は**問題 2.1** の(解法 1)に戻ってみましょう。**問題 2.2** についてこの解法を用いると、
答えは（1 以上 $k+1$ 以下のすべての整数の和） 組となり、このことから

(1 以上 $k+1$ 以下のすべての整数の和)$=\frac{(k+2)(k+1)}{2}$ …① が成り立ちます。k は非負整数でしたが、少し変えて $n=k+1$ (つまり、n は正の整数です。以降は**定理3**の添え字のものとは別の意味で用います) として、これについて考えましょう。この定義から、①は次のように書き換えられ，**定理 4** が得られます。

> **定理 4**
> nを正の整数とする。このとき、
>
> (1 以上 n 以下のすべての整数の和)$=\frac{n(n+1)}{2}$ が成り立つ。

これは三角数と呼ばれています。

では、1 から n 番目までの三角数の和 はどのようなものなのでしょう？簡単に表すことができるのでしょうか？

計算してみると、1，4，10，20，35，56，84，120，165，220，… となっていて、なかなか規則がつかめません。しかし、**定理2**と**定理3(予想1)**から道筋が立ちそうです。やってみましょう。

1 から n 番目までの三角数の和は、${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2+{}_{n+1}C_2$ で表されます。これは不等式 $x_1+x_2+x_3\leq n$ をみたす非負整数 x_1,x_2,x_3 の組の総数です。

これは等式 $x_1+x_2+x_3+x_4=n$ をみたす非負整数 x_1,x_2,x_3,x_4 の組の総数とも一致します。これは**定理3**より ${}_{n+2}C_3$ で表されることがわかるので、1 から n 番目までの三角数の和は、

${}_{n+2}C_3=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ で表されます。

これによって、1 から n 番目までの三角数の和を簡単に求められるようになりました。

4． 平方数の和

三角数と並んで知られる「図形数」に、平方数(四角数)があります。小さいものから順に、
1，4，9，16，25，36，49，64，81，100，… と続きます。三角数のように、平方数もそれらの和をうまく表すことができるのでしょうか？

まずは調べていきましょう。1 から n 番目までの平方数の和は $n=1$ から順に、
1，5，14，30，55，91，140，204，285，385，… となります。これでは先ほどと同様、規則がつかめ

ません。そこで、三角数の和が使えないかやってみましょう。列挙したものを見る限り、任意の n に対して n 番目の平方数は，n 番目の三角数以上である、つまり

$n^2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$ が成り立ちそうです。証明してみましょう。

（証明）

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n^2}{2} - \frac{n^2+n}{2}$$

$$= \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

ここで、任意の n について $n > 0$ かつ $(n-1) \geq 0$ であるから

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq 0$$

よって、(左辺)−(右辺)≥ 0 であるから、示された。 □

さて、これを使ってみましょう。差を調べていくと

$$\begin{array}{rl} & 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+\cdots+n^2 \\ -) & 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+\cdots+\frac{n(n+1)}{2} \\ \hline & 0+1+3+6+10+15+21+28+36+45+\cdots+\frac{n(n-1)}{2} \end{array}$$

これを見ると、(n 番目の平方数)－(n 番目の三角数)＝($n-1$ 番目の三角数)だとわかりますね。したがって、

(1 から n 番目までの平方数の和)＝(1 から n 番目までの三角数の和)＋(1 から $n-1$ 番目までの平方数の和)が成り立ちます。よって

$$(1\text{ から }n\text{ 番目までの平方数の和}) = {}_{n+2}C_3 + {}_{n+1}C_3$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

なので、平方数の和も簡単に求められるようになりました。

5．おわりに

いかがでしたか？この記事では、重複組み合わせ(**問題 1** の(解法2)のこと)から平方数の和を求めるまで、こんな風につながっている、とみることができました。なんでも学び始めたときは難しいも

ので、「よくわからないなあ…」という状態に(何度も)ぶつかることは必至です。その状態から、少しずつ少しずつ理解(ときには、その理解が間違っていたなんてこともありますが)していく、そうすれば「面白い」・「楽しい」といった感情がわきやすくなるのかなあと最近は考えています。この記事を読んでいただいた方が、少しでもそう思ってくださったなら、執筆者冥利に尽きます。最後までお読みいただき、ありがとうございました。

参考文献

坪井俊・大島利雄・筧三郎・服部哲弥・加藤文元・深谷賢治・川中宣明・榎本博人・坂江正・大西俊弘・松永学・官野達博・宗重徹 著,『改訂版 数学 A』, 数研出版

第5章

統計学を勉強してみよう

＜はじめに＞

この部誌の読者には、数学が好きもしくは得意な人が多くいるだろう。しかしながら中高の数学でどの分野が好きか訊いた時には、幾何や代数、解析のうちで意見が分かれるのに対して統計はそもそも話題に上がってこない。そこで、少しでも興味を持ってもらえるよう、統計学（主に大学の基礎教養科目レベル）ではどのようなことをするのか、どう勉強していくかについて大まかに解説する。

＜統計学について＞

〇他分野の数学との違い

幾何、代数、解析と呼ばれるような分野では、A だから B、B だから C…というように少数の普遍の原理から様々な証明をする。逆に言うと証明できないものは事実として受け入れられない。一方で統計学では与えられた複数のデータを分析し、そこから推測をする。自然を観察して原理を導く理科系の科目と似た部分がある。ただし予測をするという点で確率と関係性が深く、確率統計として一体的に勉強する場合もある。

〇どのような分野で使われるのか

物理や化学などの自然科学ではもちろん、経済学などの社会科学でも用いられる。最近では新型コロナウイルスの分析や対策の方針を決めるのに役立っている。活用範囲の広さから、「科学の文法」とも呼ばれている。

＜おすすめの教材（この記事で参考にした教材）と勉強法＞

・教科書・・・基礎統計学Ⅰ　統計学入門（東京大学出版会）

大学の基礎講義でも使われる、定番の一冊である。説明が詳しく載っている。王道の本である故硬い文体で書かれているため、読みにくければ分かりやすい説明が売りの参考書と併用で使うのもよい。章末問題はついているものの解説が少ないから別に問題集を買うことをお勧めする。

・問題集・・・明解演習 数理統計（小寺平治）

構成はチャートに似ている。問題の解説がしっかりしていて分かりやすい。教科書の内容が簡潔にまとめられているので少し分からないことがあるときに手軽に調べられる。

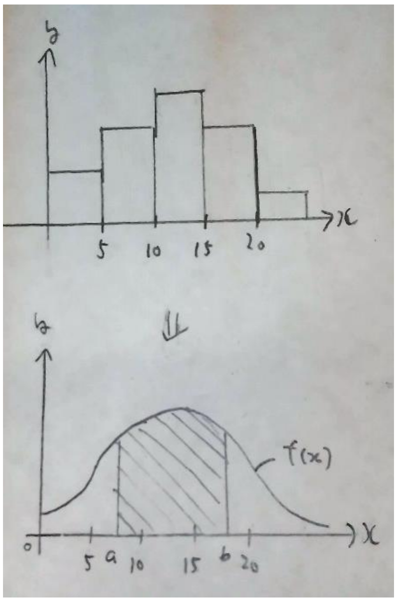
教科書である程度まとめて勉強したあと問題集で理解できているか確かめるとよい。確率分布などの大まかな振る舞いが分かるだけでも実社会で役に立つので、数式が分からなくても落ち込む必

要はない。

＜どんなことを学ぶのか＞

代表的な部分を抜粋して紹介する。簡単な説明なので、厳密には違うところもある。

○連続確率分布について（高校数学Bの選択分野　本校では現在選択されていない）

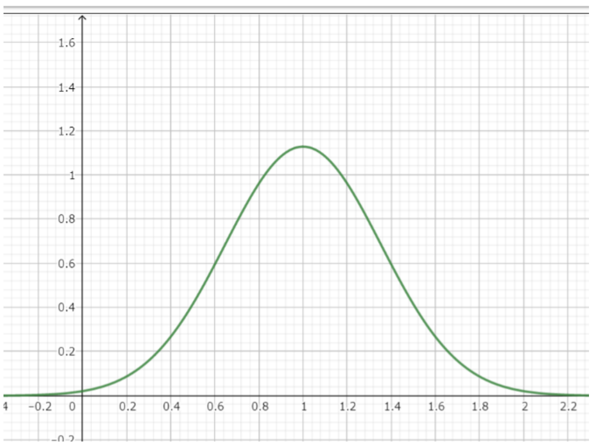


小中高ではデータの値を一定の範囲で区切ってヒストグラムを作成した。しかしヒストグラムでは、例えば 0 から 5 までが同じ階級の時に 0 付近と 5 付近のデータの数（確率）はどちらが多いのかというような細かな部分は分かりにくい。さらに、例えば東京都と島根県でそれぞれに住む人の年代の分布のヒストグラムを作り比較すると絶対的な人口が多いためにどの年代でも東京都のほうが多くなり分析しにくいように、ヒストグラムのままでは集団の大きさが違うデータを比べにくい。

そのようなことを踏まえ、そこでこのヒストグラムを全体の合計が 1 になるように階級の度数を相対度数に直し、さらに階級を極限まで細かくしてなめらかに表したのが連続確率分布である。（これに対してさいころの目のように飛び飛びの値によってできる分布を離散確率分布と言う。）さらに確率分布を描く線を確率密度関数として扱う。こうすることによって関数を計算してデータの分析ができる。（例えば確率密度関数を a から b までの範囲で定積分すると、a 以上 b 未満の面積の値が出てこれがそのまま a 以上 b 未満の確率となる。）

○代表的な確率分布

・正規分布（ガウス分布）



世界の様々な種類で、データを取った時に確率分布が正規分布になる例が多い。それもあって扱われることが一番多い分布のひとつである。山なりの分布が特徴的である。

身近な活用例だと偏差値が挙げられる。特に受験者数が多いテストの点は正規分布に似た形になる。そこで平均点μと標準偏差σを出し、μ点とった人を偏差値 50 として、$\mu+n\sigma$点とった人を偏差値 50+10n と定義する。例えば$\mu+\sigma$点とった人は偏差値 60 だ。さらにnの値（μからσの何倍離れているか）によって、その

値が上からどのくらいにあるのかが「正規分布表」というものを見ることで分かる。これによると、偏差値 60 の人は上から約 15.9%、偏差値 70 の人は約 2.2%、偏差値 75 の人は約 0.6%となる。

・一様分布

範囲内の任意の現象が同じ確率（確率密度）で起こる分布である。離散一様分布にはさいころの出目、連続一様分布にはある時間に行った時の 10 分おきに来る電車の待ち時間などが挙げられる。前者は 1,2,3…の目が出る確率がそれぞれ 1/6 で等しく、後者は待ち時間が 0 分から 1 分、1 分から 2 分、2 分から 3 分…となる確率がそれぞれ 1/10 で等しい。

ほかにも様々な確率分布がある。

○推定・検定

推定は、データを集めることによってどのような確率分布に従っているのか導き出し、同じ集団に属する未知のデータがどのような値になるか、あるいは何パーセント以上の確率で一定の範囲に収まるのかなどを予測するものである。レストランの店長になったつもりで考えてみよう。ここではとある料理が一日平均 300 食売れているものと考える。あなたは毎日 300 食分作ればよいのか、というとそんな単純な話ではない。100 食しか売れなくてせっかく作った料理を捨てざるを得ない日もあるだろうし、500 食注文が入ったのに途中で売り切れてしまい得られるはずだった売り上げを逃す可能性も有り得る。そこで推定により何パーセントの確率で何食以上何食未満売れるのかということが分かれば戦略を立てやすくなる。これに加えて廃棄したときのコストと売り切れになった時の幻の売り上げの比較や、曜日天候による傾向などを総合的に判断して最善の計画を立てることが求められる。

検定は、とあるデータの集団に仮説を立てて、それが正しいか計算・分析する。あなたは今年のリンゴが昨年より比較的小さくなっていると感じたとする。そこであなたは「リンゴの重量が昨年よりも減少した」と仮説を立てて、昨年と今年のリンゴの重さの分布を調べて検証する。具体的には次のような項目を考慮した計算式を使う。

・平均

昨年のデータの平均が 300g で、今年の平均が 250g だったら減少した可能性が高いといえる。しかし、昨年のデータの平均が 300g で今年の平均が 299g だとしたら誤差の範囲として考えてもよいだろう。

・分散

昨年の平均が 300g で今年の平均が 290g であったとしよう。昨年のデータがほぼすべて 299~301g に収まっていて今年のデータも同様にほぼすべて 289~291g であった（分散が小さい）としたら、減少したと言える。けれども昨年も今年も質量のばらつきが大きい（分散が大きい）としたら、今年はたまたま軽いものをデータとして使っていただけかもしれない。

・データの量

正しいにせよそうでないにせよ、データの数は多い方が信頼度は上がる。どの位必要かは、求

める精度と母集団の大きさによる。

計算の結果十分高い確率で仮説が正しいと認められればその仮説は採択され、認めらなければ棄却される。

＜統計検定を受けてみよう＞

一通り学習した後は統計検定で実力を試してみることをおすすめする。ここまでで説明した学習内容に対応するのは 2 級である。3級以下であれば計算だけでなく社会科のテストで出されるような資料やグラフを読み取る問題も多数出題されており、取り掛かりやすい内容となっている。

○特徴

・問題はすべて 5 択である。そのうえ合格点は 6 割(2 級)であるから、分からない問題がいくつかあっても合格できる。

・90 分で 30 問(2 級)である。各問題は大抵独立しており、連続しているのでも2問程度である。

・2022 年から、1 級以外はパソコンを使って受験する CBT 受験のみになる。(2021 年までは紙での受験と併用)CBT 受験は多くのパソコン教室が会場となっており、会場によって日程時間が違う。

・電卓が使える。

○受験までの流れ

私は今年 2 級を受験し合格した。私自身の経験を踏まえて書く。

・申し込み

「統計検定 CBT」と検索してホームページから都合の良い会場を探し、会場に連絡して申し込む。大抵 1 週間前程度まで受け付けている。

・対策

ホームページまたは本屋で過去問を入手して解き、出題形式に慣れておくとよい。基礎的な内容がほとんどであるので、専用の対策はあまり必要ない。

・受験

パソコンで正解だと思った番号を入力する。分からない問題を飛ばして後で戻ってくることもできる。私が受験したパソコン教室では筆記用具が禁止されており、計算用紙として渡されたラミネートの紙に水性ペンで書く方式だった。

・結果発表

受験後にその場で結果が出て、すぐに結果用紙レポートを印刷してくれる。合格証は数週間後に郵送される。不合格だった場合は最短で翌週に再受験できる。

＜おわりに＞

現代はインターネットなどからあふれるほどの情報が入ってくる。その中から正しい情報や自分の

役に立つ情報を選んで手に入れるメディアリテラシーの力が一層求められる。統計学での考え方を学ぶことによってそのような力を高めることができるだろう。さらに統計学を他の学問や社会に活かすことによってできることが増える。繰り返しになるが、統計学を学習して新しい知見を得てみてはいかがだろうか。

コラム2

数研の事件簿

皆さんこんにちは！今年の 3 月まで早実生だった数研 OB の S.K.です。時間の流れが早すぎる…。

今回、会誌のワンコーナーを書く機会をいただいたのですが、如何せん、数弱でさらに卒業してから数学についてほとんど縁のなかった私が何をしようかと迷いました。その結果、去年の OB の方が数研の歴史について書いてくださっていたので、~~そのパクリとして~~その流れを汲んで、数研で発生した面白かった出来事について書き連ねていこうと思います。それでは、数研で起きた、カオスな日常をお楽しみください。

① 夏休みの活動消失事件

ある日の夏休みの出来事です。その日は決めてあった予定表の通りに活動を行うはずでした。しかし、開始時刻になっても一人しか集まりません。他の人を長いこと待ち続けた結果、活動開始の時間から 1 時間以上経っても誰も来ず、その日の活動が急遽無くなるという結末を迎えました。

ちなみに、唯一参加した部員は私(筆者)です。その日は完全に数研以外の予定もなかったので、活動場所まできてそのまま家まで帰りました(´・ω・`)。

※補足　数研では夏休みの活動日を事前に決め、その際に作った予定表に沿って活動をします。しかし、基本的に参加するかしないかは完全に個人の自由なので、参加人数は日によってえげつないくらい変わることも多いです。また、ゆるくて活動も楽しい部活だから、いつでも、誰でも歓迎しています！(唐突な宣伝)

② 文化祭が忙しすぎる事件

「数研って文化部だから大して忙しくないだろう」と思っている人がいるかもしれませんが全くそんなことはありません。むしろ、どの部活よりも文化祭をガチってます。どのくらいかというと、

・部誌の内容作成&編集
・部誌のとじ込み(その数なんと数百冊。もちろん手動です)
・文化祭展示の企画・発案
・文化祭展示に必要な道具の製作　　　・・・・などなど

これらのことを部員の手で一からやらなくてはならないため、当然文化祭の準備にも相当な時間がかかっています。そのため、文化祭直前にもなると数研は普段のゆるさとは打って変わって忙しくなるのです。ひどいときになると、本来の準備時間を大きくオーバーして文化祭前日の夜までチェック作業をしたり、当日の朝に早めに登校して終わらせてない作業に取り掛かったりすることがあります。特に、毎年作成している「早実入試予想問題」は解答があっているのか、解き方は小学生あるいは中学生が解ける範囲を逸脱していないか、そもそも問題が成立しているのか、などのチェック作業が膨大にあるため、公開直前まで打ち合わせをしていることが多いです。

過去に配布した部誌は数研のホームページ(URL http://sukensite.starfree.jp)に載っています。気になったら、是非読んでみてください！(露骨な宣伝)

③ キャップ投げ＆紙飛行機ブーム到来

なんで、数研なのにキャップ投げと紙飛行機？と疑問に思う方もいるかもしれませんが、数研では一時期かなり流行っていました。というか、数学をやっている時間よりキャップ投げと紙飛行機で遊んでいた時間が長いときもありました。あとは、トランプ、ナブラ演算子ゲーム(微分積分の勉強になるのでおすすめ)、素数大富豪、なんかそこらへんに置いてあった剣みたいなオモチャを投げ合うなどなど。このように、様々なことをやっていましたが、ある日事件が起きます。

なんと教室で紙飛行機で遊んでいたら、投げたものが早実初等部の敷地に入りました。

流石にそのままだとまずいので回収をすることになったのですが、結局私が回収係になりました。バレないように回収しに行ったつもりでしたが、落ちた場所が校舎の目の前にある広場のような場所だったため、初等部の職員っぽい人にガン見されました。というかはたから見たら変質者以外の何もでもないため、死ぬほど恥ずかしかったですね。

ちなみに、回収した直後に友人にまた窓から物を投げてそれを回収させられるという悪ノリがありましたが、説教を喰らうこともなく無事に生還しました。

数研で起きた奇妙な出来事はいかがでしたでしょうか。私自身数研には多くの思い出があるため、今でもたまに遊びに行きます。そのため、数研がこれからも長く続いてくれることより嬉しいことはありません。これからも数研の活躍にご期待ください。ありがとうございました。

大学入ってから思ったこと＆後輩たちに言いたいこと

最後に、私が大学生として、高校生たちにアドバイスというか、こうしといたほうが良いよみたいなことを書いていこうかと思います。なお、筆者の独断と偏見に満ちた内容なのでおかしい箇所はあると思いますが、ご容赦をお願いします。

・英語はちゃんとできるようにしないと死ぬよ！

英語が苦手な高校生の人たちは、卒業したらもうやらなくて済むと思っていないでしょうか。全然そんなことありません。大学の講義では文理問わず、英語を使うことが普通にあります。例えば、講義の中で英語で書かれた海外の論文やニューストピックなどを読む際に英語力が他の人と大幅に劣ってたりなんかすると、自分だけまだ最初の方しか読めてない！とかいちいち単語を調べてるから時間内に終わらない！といったことになりがちです。

英語を得意にならなくても全然いいので、英語に極端な苦手意識を持つようになることだけは避けましょう。

・自分から動かないと虚無みたいな生活を送る羽目になるよ！

今回一番言いたいことがこれですね。大学においては自分から動かないと本当に時間が無為に過ぎていきます。中学や高校のようにクラスといったものもなく（あったとしても高校までのそれとは違って所属先としての意味はあまり持たないし、会う回数もあんまり多くない）、文化祭や修学旅行などの思い出に残りそうなイベントも勝手に起きてくれるわけではありません。そのため、楽しい大学生活あるいは自分にとって意味のある大学生活にするには自分から行動していく必要があります。友達を作るのも、サークルに入って楽しい友人関係を作るのも、アルバイトをしていろんな経験をするのも、自分から行動することが必須となります。

虚無みたいな大学生活を送らないように、なんでもいいので行動していきましょう。講義に出席して、終わったら即帰宅したらゲームばかりして、課題は締め切り直前になって適当に終わらせるみたいな生活はやめた方が良いと思います。（やけに内容が具体的すぎる？察してください）

・課題を後回しにするのはやめたほうがいいよ！

受けている授業によりますが、なんやかんや大学では普通に課題を出されます。~~少なくとも早実という、課題らしい課題が夏休みの宿題くらいしかなく、厳しさとは無縁のような場所とは比べ物になりません。~~そのため、夏休みの宿題を最終日に焦ってやるタイプの人だと、「ある科目 A の課題が出される→提出締め切りが近い他の科目 B や科目 C の課題が終わっていないので手がつけられない→提出期限ギリギリになってようやく科目 A の課題に取り掛かる→なんとか間に合ったが、提出

直後にまた科目 A の課題が出される→課題 A をやっていたせいで取り掛からなかった提出締め切りが近い他の科目 B や科目 C の課題が終わっていないので手がつけられない→ …以下ループ」というサイクルが学期が終わるまで繰り返される羽目になります。このようなことにならないためにも、課題を早め早めから終わらせる癖は絶対につけましょう。

以上がおおよそ私の言いたかったことです。暗い話ばかりになりましたが、楽しい大学生活を送るためにも、自らの手で行動し、楽しい大学生活を送れるように頑張ってください。

おわりに

会誌第6号を読んでいただきありがとうございました。

今年も昨年と同様に、残念ながら部誌を印刷し、皆様に直接お渡しすることができませんでした。しかしながら高等部生、中等部生が力を合わせて、そして OB の力も借りて今年の部誌を完成させることができました。

オンラインでの公開となりましたが、お読みいただけたら幸いです。

「数学」と聞くとどこか難しそうなイメージがあり、避けられがちなところもありますが、この部誌を通して数学の面白さ、「すうけん」活動の面白さが伝わることを願っています。

数研メンバーは 40 人(2021 年 11 月現在)となりました。

今後も多くの人に数学の魅力を伝えられよう、活動していきます。

すうけん 2021 メンバー

顧問　Mr.N.H.

副顧問　Mr.S.M.　Mr.Y.S.

OB

Y.I.　W.T.　S.K.　H.W.

高 3

S.A.　H.O.　H.T.　S.Y.

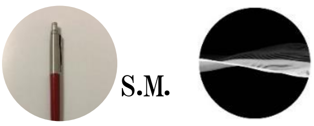
高2

R.A.　T.I.　G.I.　S.O.　I.O.　Y.K.

H.S.　N.T.　Y.T.　K.H.　Y.Y.

高1

T.K.　J.S.　Y.T.　S.T.　S.H.　Y.M.

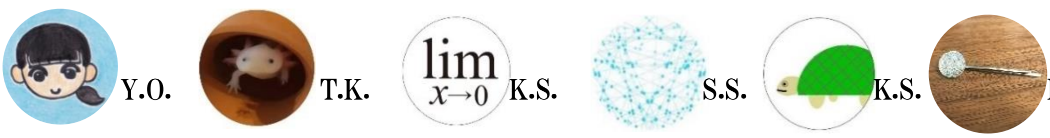


S.M.　S.M.

中 3

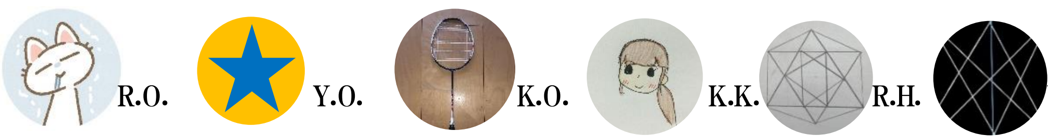
R.I.　N.U.　Y.N.　H.H.

中 2



Y.O.　T.K.　K.S.　S.S.　K.S.　D.N.

中 1



R.O.　Y.O.　K.O.　K.K.　R.H.　Y.M.

H.Y.

すうけん